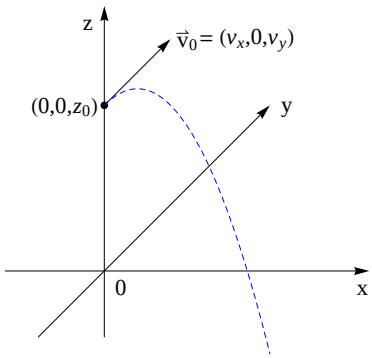
# Mehanika 1

## Osnove Newtonove mehanike

(1) Izračunaj trajektorijo materialne točke z maso $m$ pri gibanju pod vplivom sile teže.

*Rešitev:* Pri tej nalogi si bomo pogledali poševni met. Zaradi enostavnosti bomo privzeli, da se v začetnem trenutku točka nahaja na $z$-osi in da ima hitrost v smeri $xz$-ravnine.




Točka se giblje pod vplivom sile teže $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, njen položaj ob času $t$ pa bomo označili z $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Če ne bo nevarnosti za kakšno pomoto, neodvisne spremenljivke $t$ pogosto ne bomo pisali.

Gibanje točke po prostoru določa drugi Newtonov zakon

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}.$$

Matematično gledano je to sistem treh navadnih diferencialnih enačb drugega reda, ki ga po komponentah lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= -mg. \end{aligned}$$

Rešitev takšnega sistema diferencialnih enačb je določena z začetnim položajem in pa z začetno hitrostjo točke

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= (0, 0, z_0), \\ \dot{\vec{r}}(0) &= (v_x, 0, v_z). \end{aligned}$$

V splošnem je naš napredek odvisen od naše spretnosti reševanja diferencialnih enačb. Če sistema ne znamo rešiti analitično, lahko poskusimo približno rešitev poiskati s kakšnimi numeričnimi orodji. V našem primeru so komponente sistema separirane, zato lahko vsako enačbo rešimo posebej. V bistvu nam niti ni potrebno znati reševati diferencialnih enačb, saj zadostuje že dvakratno integriranje.

V smeri osi $x$:

Z integriranjem enačbe $m\ddot{x} = 0$ (oziroma $\ddot{x} = 0$) dobimo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C, \\ x &= Ct + D. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev $x(0) = 0$ in $\dot{x}(0) = v_x$ od tod sledi

$$x(t) = v_x t.$$

V smeri osi $y$:

Tokrat na podoben način z integriranjem enačbe $m\ddot{y} = 0$ dobimo

$$\begin{aligned} \dot{y} &= C, \\ y &= Ct + D. \end{aligned}$$

Ker je v tem primeru $y(0) = 0$ in $\dot{y}(0) = 0$, je

$$y(t) = 0.$$

V smeri osi $z$:

V navpični smeri z integriranjem enačbe $m\ddot{z} = -mg$ (oziroma $\ddot{z} = -g$) dobimo

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -gt + C, \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D. \end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $z(0) = z_0$ in $\dot{z}(0) = v_z$, dobimo

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0.$$

Trajektorija točke pri poševnem metu je torej

$$\vec{r}(t) = \left( v_x t, 0, -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0 \right).$$

V tem zapisu za vsak čas $t$ natančno vemo, kje se točka nahaja. Če iz enakosti $x = v_x t$ izrazimo $t$ in rezultat vstavimo v $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0$, pa dobimo, da se točka giblje po paraboli

$$y = 0,\ z = -\frac{g}{2v_x^2}x^2 + \frac{v_z}{v_x}x + z_0.$$

$\square$

(2) Opiši množico Galilejevih transformacij in njeno grupno strukturo.

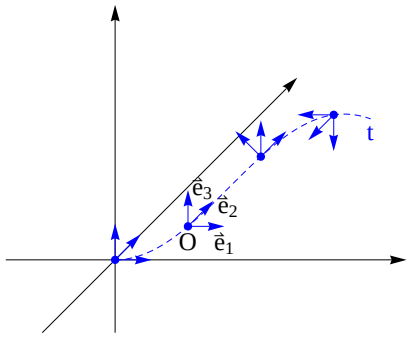
*Rešitev:* V Newtonovem opisu klasične mehanike predpostavljamo, da sta prostor in čas absolutna. To pomeni, da je prostor dogodkov oblike

$$S = E \times T,$$

kjer je $E$ trirazsežni Evklidski prostor, medtem ko s $T$ parametriziramo čas dogodkov. Prva komponenta nam pove, kje se je dogodek zgodil, druga pa, kdaj se je zgodil.

Ko opisujemo gibanje točke ali telesa, to ponavadi storimo tako, da povemo, kako se spreminjajo njene koordinate v odvisnosti od časa. Le-te pa so odvisne od našega položaja oziroma orientacije. Z različnih zornih kotov se gibanje točke opiše z različnimi funkcijami.

Opazovalec oziroma *koordinatni sistem* na prostoru dogodkov $S$ je enoparametrična družina izbir koordinatnih osi v prostoru $E$, parametrizirana s časom. To pomeni, da imamo ob vsakem času izbrano neko točko $O$, ki je izhodišče koordinatnega sistema, in pa trojico ortonormiranih vektorjev $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Mislimo si lahko, da je $O$ naš trenutni položaj in da trojica $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ določa našo trenutno orientacijo.




Vsak dogodek lahko glede na izbrani koordinatni sistem opišemo s koordinatami

$$(\vec{x}, t) = (x, y, z, t),$$

ki nam določajo bijekcijo med $S$ in $\mathbb{R}^4$. Zaenkrat smo predpostavili, da uporabljajo vsi opazovalci enako naravnane ure. Lahko pa bi to zahtevo še malo sprostili in zahtevali samo, da vsem tečejo enako hitro, ne kažejo pa vse nujno istega časa.

Razred vseh koordinatnih sistemov je prevelik za našo obravnavo. Najbolj zanimiv je podrazred inercialnih koordinatnih sistemov. To so tisti koordinatni sistemi, ki se gibljejo enakomerno glede na absolutni prostor in so ves čas enako orientirani. Lahko pa bi jih definirali tudi s pogojem, da je v njih veljaven drugi Newtonov zakon. Glede na to, da je drugi Newtonov zakon pravzaprav diferencialna enačba drugega reda, bosta dva koordinatna sistema, ki se enakomerno gibljeta eden glede na drugega, oba hkrati inercialna ali pa ne. Poleg tega se inercialnost ohranja še pri spremembi orientacije in pa pri spremembi ure. Inercialnih sistemov je torej veliko, naša naloga pa bo, da jih ustrezno parametriziramo.

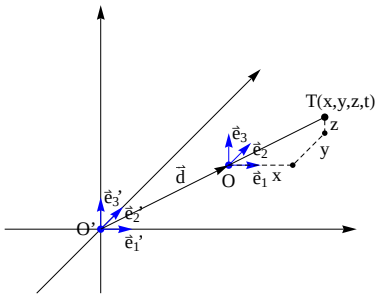
Recimo, da imamo dva inercialna koordinatna sistema $(O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ in $(O', (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3))$. Preslikavi $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ki je implicitno definirana s predpisom

$$(x', y', z', t') = G(x, y, z, t),$$

in ki ustreza spremembi koordinat iz prvega koordinatnega sistema v drugi koordinatni sistem, rečemo *Galilejeva transformacija*. Različni pari inercialnih koordinatnih sistemov nam porodijo različne Galilejeve transformacije. Množica vseh tako dobljenih Galilejevih transformacij tvori *Galilejevo grupo*. Najprej si bomo pogledali nekaj preprostih primerov Galilejevih transformacij.

1. Translacija izhodišča:

Recimo, da imamo primer, ko koordinatna sistema KS in KS' mirujeta eden glede na drugega, njuni izhodišči pa sta zamaknjeni za vektor $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$. Oba sta orientirana na isti način, njuni uri pa sta poravnani.




Izberimo si poljubno točko $T$, ki ima koordinate $(x, y, z, t)$ glede na KS in $(x', y', z', t')$ glede na KS'. Med koordinatami točke $T$ potem velja zveza

$$\begin{aligned} x' &= x + d_x, \\ y' &= y + d_y, \\ z' &= z + d_z, \\ t' &= t, \end{aligned}$$

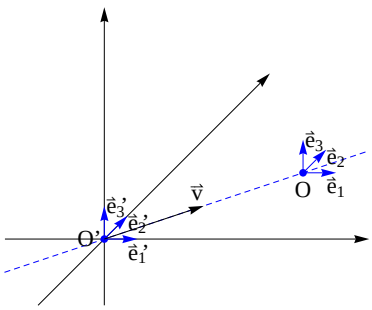
oziroma v vektorski obliki

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{d}, \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Gledano kot preslikava $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je ta preslikava translacija na 'prostorskem' delu $\mathbb{R}^4$.

2. Enakomerno gibanje:

Recimo sedaj, da se koordinatni sistem KS enakomerno s hitrostjo $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ premika glede na koordinatni sistem KS'. Predpostavimo še, da njuni izhodišči ob času $t = 0$ sovpadata, da sta oba orientirana na isti način in da sta njuni uri poravnani.



Situacija je pri vsakem fiksnem času podobna kot v prejšnjem primeru. Ob času $t$ sta koordinatna sistema namreč zamaknjena za vektor $t\vec{v}$. Med koordinatami točke $T$ v obeh koordinatnih sistemih torej velja zveza

$$\begin{aligned} x' &= x + v_x t, \\ y' &= y + v_y t, \\ z' &= z + v_z t, \\ t' &= t, \end{aligned}$$

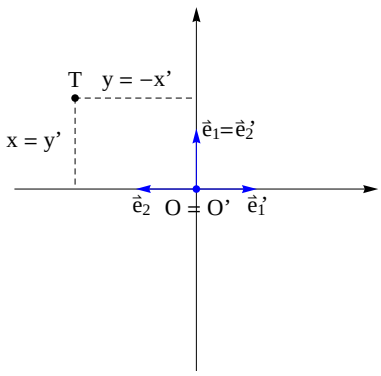
oziroma v vektorski obliki

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + t\vec{v}, \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Dobljena Galilejeva transformacija je linearna preslikava $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, pri kateri pa prostorski in časovni del nista ločena med sabo.

3. Rotacija:

Naslednji preprost primer relativne lege dveh koordinatnih sistemov je sprememba orientacije. Za začetek si poglejmo preprost dvodimenzionalen primer.




Koordinatni sistem KS je zarotiran za 90° glede na koordinatni sistem KS'. To rotacijo lahko predstavimo z matriko

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če ima točka $T$ koordinati $(x, y)$ v sistemu KS in koordinati $(x', y')$ v sistemu KS', med koordinatami velja zveza

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Denimo sedaj, da ima KS za bazo vektorje $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, KS' pa $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. Položaj KS glede na KS' opišemo z rotacijsko matriko $Q$, ki zadošča pogoju

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1, & \vec{e}_2, & \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}'_1, & \vec{e}'_2, & \vec{e}'_3 \end{bmatrix} \cdot Q.$$

Med koordinatami točke $T$ v obeh koordinatnih sistemih potem velja zveza

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= Q\vec{x}, \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Dobljena Galilejeva transformacija je linearna preslikava $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ki zarotira prostorski del, časovni del pa pusti pri miru.

V tem primeru moramo biti pozorni na rahlo različno vlogo rotacijske matrike v primerih koordinat in pa v primerih baz. Na koordinate oziroma vektorje deluje grupa rotacij z leve, medtem ko deluje grupa rotacij na prostor baz z desne. Če nam matrika $Q$ predstavlja prehod iz koordinatnega sistema KS' v koordinatni sistem KS, nam na nivoju koordinat predstavlja prehod iz $(x, y, z)$ koordinat v $(x', y', z')$ koordinate.

4. Časovna translacija:

V tem primeru koordinatna sistema KS in KS' sovpadata, kar se tiče izhodišča in orientacije, le uri imata drugače naravnani. Povezava med koordinatami je potem oblike

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x}, \\ t' &= t + \tau. \end{aligned}$$

Dobljena Galilejeva transformacija je analogna tisti iz prvega primera, le da sta zamenjani vlogi časa in prostora.

V splošnem je relativni položaj dveh koordinatnih sistemov bolj kompliciran kot pa v zgornjih primerih. Zmeraj pa ga lahko opišemo s pomočjo zgornjih štirih parametrov na naslednji način.

Relativno gibanje sistema KS glede na KS' opišemo z vektorjem $\vec{v}$ (s komponentami glede na bazo KS'). Matrika $Q$ nam pove, kako je baza sistema KS zarotirana glede na bazo sistema KS'. Položaj izhodišča sistema KS (ob času $t = 0$ v KS) glede na KS' označimo z vektorjem $\vec{d}$ (s komponentami glede na bazo KS'). Kot zadnji parameter definiramo $\tau = t' - t$. Na ta način lahko položaj koordinatnega sistema KS glede na sistem KS' opišemo z matriko

$$G = \begin{bmatrix} Q & \vec{v} & \vec{d} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

V teh oznakah je $Q \in SO(3)$, $\vec{d}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ in $\tau \in \mathbb{R}$. Povezavo med koordinatami v obeh koordinatnih sistemih lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & \vec{v} & \vec{d} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{x} \\ t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zgornji predpis nam pravzaprav predstavlja upodobitev

$$Gal \to GL(5, \mathbb{R})$$

Galilejeve grupe v grupo $5 \times 5$ obrnljivih matrik. Ker je Galilejeva grupa parametrizirana z vsemi matrikami zgornje oblike, od tod sledi, da je Galilejeva grupa 10-dimenzionalna Liejeva grupa. Da je ta preslikava upodobitev, pa pomeni naslednje. Recimo, da

$\cdot$ $G_{12}$ predstavlja položaj koordinatnega sistema KS2 glede na KS1,

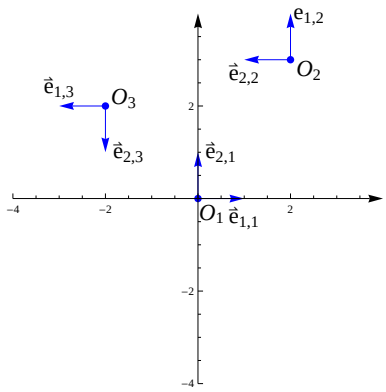
$\cdot$ $G_{23}$ predstavlja položaj koordinatnega sistema KS3 glede na KS2.

Potem

$G_{12}G_{23}$ predstavlja položaj koordinatnega sistema KS3 glede na KS1.

Poglejmo si na preprostem ravninskem primeru, kako ta stvar deluje. Recimo, da imamo tri mirujoče koordinatne sisteme, z različnimi orientacijami in izhodišči. Koordinatni sistem KS2 je zarotiran za 90° glede na KS1 in premaknjen za vektor $\vec{d}_{12} = (2, 3)$. Podobno je KS3 zarotiran za 90° glede na KS2 in premaknjen za vektor $\vec{d}_{23} = (-1, 4)$. Za rotacijski matriki torej velja

$$Q_{12} = Q_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$




Položaj koordinatnega sistema KS3 glede na KS1 potem dobimo po formuli

$$\begin{bmatrix} Q_{13} & 0 & \vec{d}_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{12} & 0 & \vec{d}_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{23} & 0 & \vec{d}_{23} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$Q_{13} = Q_{12}Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{d}_{13} = Q_{12}\vec{d}_{23} + \vec{d}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Torej je koordinatni sistem KS3 zarotiran za 180° glede na KS1 in premaknjen za vektor $\vec{d}_{13} = (-2, 2)$, kar lahko preverimo tudi na sliki.

Za konec omenimo še nekaj znanih podgrup Galilejeve grupe:

$\underline{SO(3)}$:

Ta sestoji iz matrik oblike

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in ustreza rotacijam prostora.

$\underline{\mathbb{R}^3}$:

Ta podgrupa sestoji iz matrik oblike

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \vec{d} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in ustreza translacijam prostora.

$\underline{SE(3) = SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3}$:

Ta podgrupa sestoji iz matrik oblike

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & \vec{d} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in ustreza (orientacijo ohranjajočim) izometrijam prostora.

$\underline{\mathbb{R}}$:

Ta podgrupa sestoji iz matrik oblike

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in ustreza časovnim premikom.

$\underline{\mathbb{R}^3}$:

Ta podgrupa sestoji iz matrik oblike

$$\begin{bmatrix} I & \vec{v} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

V klasični mehaniki bi tej grupni strukturi lahko rekli formula za seštevanje hitrosti. Če se namreč koordinatni sistem KS2 giblje glede na KS1 s hitrostjo $\vec{v}$ in se KS3 giblje glede na KS2 s hitrostjo $\vec{w}$, se KS3 giblje glede na KS1 s hitrostjo $\vec{v} + \vec{w}$. $\square$