Mehanika 1

Sistem materialnih točk

(1) Točki z masama m_1 in m_2 elastično trčita.

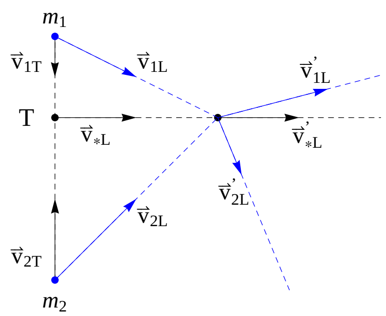
(a) Obravnavaj trk v težiščnem in v laboratorijskem koordinatnem sistemu.

(b) Recimo, da točka z maso m_2 pred trkom miruje in da je $m_1 = m_2$. Dokaži, da sta smeri hitrosti obeh točk po trku pravokotni.

(c) Obravnavaj čelni trk obeh točk, če točka z maso m_2 na začetku miruje.

Rešitev: (a) Pri obravnavi trkov imamo na razpolago dva koordinatna sistema. Sistemu, v katerem ponavadi opazujemo trk točk, rečemo laboratorijski koordinatni sistem in ga označimo z LKS. Najbolj nas seveda zanima opis dogajanja v tem sistemu, računsko pa je gibanje točk pogosto lažje opisati v težiščnem koordinatnem sistemu TKS. To je sistem, ki se giblje hkrati z masnim središčem sistema točk. Dogovorimo se, da bomo vektorjem hitrosti v LKS dodali indeks L v TKS pa indeks T. S črticami bomo označili hitrosti točk po trku.

Pred trkom:



Naj bosta $\vec{v}_{1L}$ in $\vec{v}_{2L}$ hitrosti obeh točk pred trkom, gledano v LKS. Masno središče sistema obeh točk ima potem v LKS hitrost

$$\vec{v}_{*L} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1L} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{2L}.$$

Če opazujemo gibanje prve točke v TKS, je njena hitrost enaka

$$\vec{v}_{1T} = \vec{v}_{1L} - \vec{v}_{*L} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_{1L} - \vec{v}_{2L}).$$

Označimo sedaj z $\vec{v} = \vec{v}_{1L} - \vec{v}_{2L}$ hitrost približevanja prve točke drugi točki. Potem sta hitrosti obeh točk v TKS pred trkom

$$\vec{v}_{1T} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v},$$
$$\vec{v}_{2T} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}.$$

Po trku: Privzeli smo, da je trk točk elastičen, kar pomeni, da se pri trku ohranjata skupna energija in pa gibalna količina sistema točk. Ker je v TKS skupna gibalna količina sistema točk pred trkom enaka nič, je po trku

$$m_1\vec{v}'_{1T} + m_2\vec{v}'_{2T} = 0.$$

Od tod sledi, da sta tudi po trku hitrosti obeh točk v TKS kolinearni. Naj bo

$$\begin{aligned}\vec{v}'_{1T} &= \alpha\vec{u},\\ \vec{v}'_{2T} &= \beta\vec{u},\end{aligned}$$

kjer je $\vec{u}$ nek enotski vektor, α pa pozitivna konstanta. Natačna smer vektorja $\vec{u}$ je odvisna od interakcije točk med trkom, lahko pa zavzame vse smeri, ki so različne od začetne smeri prve točke. V tem primeru bi namreč točki prešli ena čez drugo brez trka. Iz pogoja o ohranitvi skupne gibalne količine dobimo

$$\beta = -\frac{m_1}{m_2}\alpha.$$

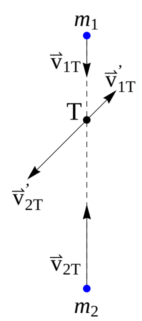
Za določitev konstante bomo uporabili še predpostavko, da se skupna kinetična energija sistema ohranja. Sledi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1|\vec{v}_{1T}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_{2T}|^2 &= \frac{1}{2}m_1|\vec{v}'_{1T}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}'_{2T}|^2,\\ \frac{1}{2}m_1\alpha^2 + \frac{1}{2}m_2\beta^2 &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2|\vec{v}|^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2|\vec{v}|^2,\\ m_1\alpha^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) &= \frac{m_1m_2(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2}|\vec{v}|^2,\\ \alpha &= \frac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}|.\end{aligned}$$

Pišimo $v = |\vec{v}|$. Hitrosti obeh točk po trku sta v TKS tako enaki

$$\begin{aligned}\vec{v}'_{1T} &= \frac{m_2 v}{m_1+m_2}\vec{u},\\ \vec{v}'_{2T} &= -\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\vec{u},\end{aligned}$$

kar pomeni, da sta po absolutni vrednosti enaki kot pred trkom, le da kažeta v drugo smer.



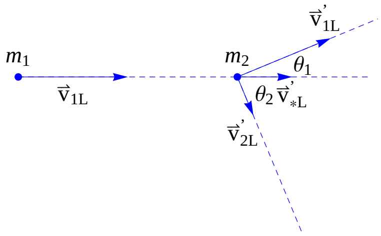
V laboratorijskem sistemu pa sta hitrosti točk po trku enaki

$$\vec{v}'_{1L} = \vec{v}_{*L} + \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}\vec{u},$$
$$\vec{v}'_{2L} = \vec{v}_{*L} - \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}\vec{u}.$$

(b) Natančneje si bomo pogledali primer, ko točka z maso m_2 pred trkom miruje. V tem primeru je

$$\vec{v}_{*L} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1L},$$

kar pomeni, da se težišče sistema premika v isto smer kot prva točka. Po trku se težišče še vedno premika v isti smeri, obe točki pa odletita vsaka na svojo stran.



Do položaja na sliki pride, če vektor $\vec{u}$ ni vzporeden hitrosti težišča. Če pa sta ta dva vektorja vzporedna, točki trčita čelno. Ta primer bomo obravnavali malce kasneje. Kot med hitrostima točk po trku je enak

$$\theta = \theta_1 + \theta_2.$$

Pokazali bomo, da velja $\theta = \frac{\pi}{2}$, če je $m_1 = m_2 = m$. Skalarni produkt vektorjev hitrosti je enak

$$\begin{aligned}
\vec{v}'_{1L} \cdot \vec{v}'_{2L} &= \left(\vec{v}_{*L} + \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}\vec{u}\right) \cdot \left(\vec{v}_{*L} - \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}\vec{u}\right), \\
&= \left(\vec{v}_{*L} + \frac{v}{2}\vec{u}\right) \cdot \left(\vec{v}_{*L} - \frac{v}{2}\vec{u}\right), \\
&= |\vec{v}_{*L}|^2 - \frac{v^2}{4}.
\end{aligned}$$

Ker je $|\vec{v}_{*L}| = \frac{v}{2}$, je zgornji skalarni produkt enak nič, kar smo želeli dokazati.

(c) Pri čelnem trku ležijo vse hitrosti pred in po trku na isti premici. Od tod sledi, da je

$$\vec{u} = -\frac{\vec{v}_{1L}}{|\vec{v}_{1L}|} = -\frac{\vec{v}_{1L}}{v}.$$

Hitrosti obeh točk v LKS sta torej

$$\vec{v}'_{1L} = \vec{v}_{*L} + \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}\vec{u} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1L} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1L} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1L},$$
$$\vec{v}'_{2L} = \vec{v}_{*L} - \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}\vec{u} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1L}\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1L} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1L}.$$

Še posebej sta zanimiva dva primera. Če je $m_1 = m_2$, je

$$\vec{v}'_{1L} = 0,$$
$$\vec{v}'_{2L} = \vec{v}_{1L}.$$

To pomeni, da se prva točka po trku ustavi, druga točka pa se giblje naprej z isto hitrostjo, kot se je gibala prva točka pred trkom.

Če pa je $m_2 >> m_1$, pa dobimo

$$\vec{v}'_{1L} \approx -\vec{v}_{1L},$$
$$\vec{v}'_{2L} \approx 0.$$

V tem primeru se prva točka odbije od druge s približno enako hitrostjo kot pred trkom.

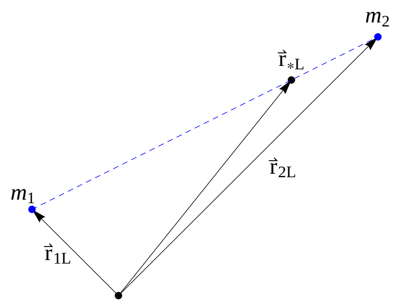
□

(2) Materialni točki z masama m_1 in m_2 se gibljeta pod vplivom medsebojne odbojne sile, ki je odvisna samo od razdalje med točkama in kaže v smeri zveznice med točkama. Jakost sile je dana s predpisom

$$F(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

za $\alpha > 0$. Privzemimo, da druga točka na začetku miruje, prva točka pa se giblje proti njej z velike oddaljenosti s hitrostjo v_∞ in z vpadnim parametrom d. Izračunaj kot med začetno in končno relativno hitrostjo prve točke glede na drugo točko.

Rešitev: Gibanje sistema dveh točk lahko razdelimo na gibanje težišča in pa na relativno gibanje prve točke glede na drugo točko.



Položaj težišča sistema točk je v LKS enak

$$\vec{r}_{*L} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_{1L} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_{2L}.$$

Od tod sledi, da lahko položaja obeh točk glede na težišče izrazimo z vektorjema:

$$\vec{r}_{1T} = \vec{r}_{1L} - \vec{r}_{*L} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r},$$
$$\vec{r}_{2T} = \vec{r}_{2L} - \vec{r}_{*L} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r},$$

kjer je $\vec{r} = \vec{r}_{1L} - \vec{r}_{2L}$ položaj prve točke glede na drugo točko. Od tod dobimo:

$$\vec{r}_{1L} = \vec{r}_{*L} + \vec{r}_{1T} = \vec{r}_{*L} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r},$$
$$\vec{r}_{2L} = \vec{r}_{*L} + \vec{r}_{2T} = \vec{r}_{*L} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}.$$

Privzeli smo, da na točki ne delujejo nobene zunanje sile, zato se skupna gibalna količina sistema ohranja, kar pa pomeni, da se težišče sistema giblje po premici s konstantno hitrostjo. Za določitev gibanja obeh točk je zato dovolj izračunati, kako se prva točka giblje glede na drugo točko. Torej bo naš cilj, da nekaj povemo o funkciji $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Diferencialno enačbo, ki določa $\vec{r}(t)$ bomo dobili iz 2. Newtonovega zakona. Privzeli smo, da točki delujeta ena na drugo s silo, ki je odvisna samo od medsebojne razdalje in ki kaže v smeri zveznice med obema točkama. Iz 3. Newtonovega zakona pa sledi še, da sta si te dve sili nasprotno enaki.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_{1L} &= F(r)\frac{\vec{r}}{r}, \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_{2L} &= -F(r)\frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned}$$

Če ti dve enačbi delimo z ustreznima masama in nato odštejemo, pridemo do enačbe

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{1L} - \ddot{\vec{r}}_{2L} &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) F(r)\frac{\vec{r}}{r}, \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} &= F(r)\frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned}$$

Koeficientu $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ rečemo reducirana masa sistema točk. Če je medsebojna sila F dana s potencialom V, smo dinamiko sistema dveh točk tako prevedli na gibanje točke z maso μ pod vplivom centralne sile F.

Podrobneje si bomo pogledali primer, ko med točkama deluje električna odbojna sila. Privzeli bomo, da se prva točka približuje drugi točki z velike oddaljenosti s hitrostjo v_∞ po premici, ki je od druge točke oddaljena za d. Matematično lahko to strnemo v naslednje začetne pogoje:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -\infty} x(t) &= -\infty, \\ \lim_{t \to -\infty} y(t) &= d, \\ \lim_{t \to -\infty} \dot{x}(t) &= -v_\infty, \\ \lim_{t \to -\infty} \dot{y}(t) &= 0. \end{aligned}$$

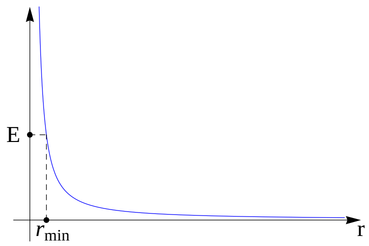
Iz našega znanja o gibanju točke v polju centralne sile vemo, da velja

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E,$$

kjer je $V_{\text{eff}}(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$. Konstanti gibanja E in l lahko izluščimo iz 'začetnih pogojev' pri $t \to -\infty$. V tej limiti ima namreč točka samo kinetično energijo, njena hitrost pa je $-v_\infty \vec{i}$. Od tod dobimo, da je

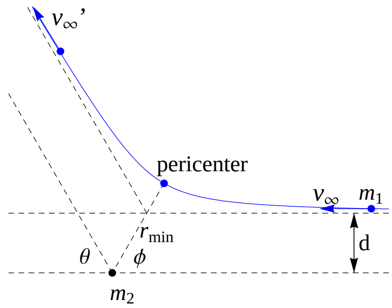
$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu v_\infty^2, \\ l &= \mu d v_\infty. \end{aligned}$$

Če analiziramo graf efektivnega potenciala, vidimo, da bo gibanje prve točke glede na drugo točko neomejeno.



Na začetku se bosta obe točki približevali ena drugi, v pericentru bo njuna medsebojna oddaljenost minimalna, nato pa se bosta začeli ena od druge oddaljevati. Iz splošne teorije o gibanju točke v polju centralne sile vemo še, da bo tir prve točke simetričen glede na pericenter.

V nadaljevanju bo naš cilj izračunati kot med začetno in končno relativno hitrostjo prve točke glede na drugo točko.



Zaradi simetričnosti tira je

$$\theta = \pi - 2\phi,$$

kar pomeni, da je dovolj izračunati kot ϕ. Pri tem si bomo pomagali s formulo, ki nam pove, kakšen polarni kot opiše točka, ki se giblje po tiru od točke na tiru, ki ustreza razdalji r_1, do točke na tiru, ki ustreza razdalji r_2 od centra sile

$$\Delta\phi = \text{sgn}(\dot{r}) \int_{r_1}^{r_2} \frac{l\,dr}{r^2\sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}(r)})}}.$$

V našem primeru bomo vzeli $r_1 = \infty$, $r_2 = r_{\text{min}}$, ker se točka na začetku približuje centru sile, pa je $\text{sgn}(\dot{r}) = -1$. Računajmo

$$\phi = -\int_{\infty}^{r_{\text{min}}} \frac{l\,dr}{r^2\sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}(r)})}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\text{min}}}^{\infty} \frac{l\,dr}{r^2\sqrt{E - \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2}}}$$

Uvedimo sedaj novo spremenljivko $u = \frac{1}{r}$. Sledi $du = -\frac{dr}{r^2}$ in

$$\phi = -\frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{\frac{1}{r_{\text{min}}}}^{0} \frac{l\,du}{\sqrt{E - \alpha u - \frac{l^2}{2\mu}u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{0}^{\frac{1}{r_{\text{min}}}} \frac{l\,du}{\sqrt{E - \alpha u - \frac{l^2}{2\mu}u^2}}.$$

Če upoštevamo še, da za $a < 0$ in $D = b^2 - 4ac > 0$ velja

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{D}}\right) + C,$$

dobimo:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_0^{\frac{1}{r_{\min}}} \frac{l\,du}{\sqrt{E - \alpha u - \frac{l^2}{2\mu}u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \cdot \frac{-l}{\sqrt{\frac{l^2}{2\mu}}} \arcsin\left(\frac{-\frac{l^2}{\mu}u - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2El^2}{\mu}}}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{r_{\min}}},$$

$$= \arcsin\left(\frac{\frac{l^2}{\mu}u + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2El^2}{\mu}}}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{r_{\min}}}.$$

Zveza med energijo točke in minimalno razdaljo je enaka $E = V_{\text{eff}}(r_{\min}) = \frac{\alpha}{r_{\min}} + \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2}$. Od tod lahko izpeljemo, da je izraz v zgornjem oklepaju pri $u = \frac{1}{r_{\min}}$ enak 1. Sledi

$$\phi = \arcsin 1 - \arcsin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2El^2}{\mu}}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}}.$$

Če izrazimo rezultat v odvisnosti od začetne hitrosti v_∞ in vpadnega parametra d, dobimo

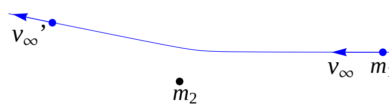
$$\frac{2El^2}{\mu} = \frac{\mu v_\infty^2 (\mu d v_\infty)^2}{\mu} = (\mu d v_\infty^2)^2$$

oziroma

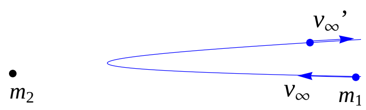
$$\phi = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu d v_\infty^2}{\alpha}\right)^2}}.$$

Poglejmo si dva limitna primera.

1) Če je parameter $\frac{\mu d v_\infty^2}{\alpha}$ velik, je $\phi \approx \frac{\pi}{2}$ in $\theta \approx 0$. V primeru, ko je torej vpadni parameter d velik, ali pa medsebojna sila (ki je odvisna od α) majhna, se tir točke le malo ukrivi.



2) Če pa je parameter $\frac{\mu d v_\infty^2}{\alpha}$ majhen, je $\phi \approx 0$ in $\theta \approx \pi$. V primeru, ko bi morali točki skoraj čelno trčiti, ali pa je medsebojna sila zelo velika, se prva točka odbije nazaj.



□