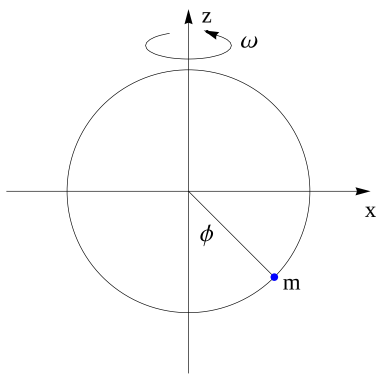
Mehanika 1

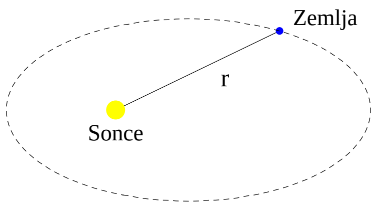
Sistemi z eno prostostno stopnjo

Sistem z eno prostostno stopnjo je mehanski sistem, katerega stanje (položaj) lahko opišemo z enim parametrom.

Zgled. (1) Recimo, da se točka z maso m pod vplivom sile teže giblje po obroču, ki se enakomerno vrti okoli navpične osi. Tedaj se točka giblje v treh dimenzijah, čeprav lahko njen položaj natančno določimo že z enim parametrom (na primer s kotom).



(2) Za opis kroženja Zemlje okoli Sonca bi načeloma potrebovali tri parametre, pokazali pa bomo, da lahko gibanje Zemlje natanko določimo že, če vemo, kako se spreminja njena oddaljenost od Sonca. Tako se gibanje Zemlje v trorazsežnem prostoru zreducira na 'gibanje' parametra r.



Tipični primeri sistemov, ki jih lahko opišemo z enim parametrom, so:

· gibanje točke po premici (na primer pod vplivom sile teže ali pa sile vzmeti),
· gibanje točke po prostorski ali po ravninski krivulji (pod vplivom sile teže),
· gibanje točke v polju centralne sile.

Prostor stanj je na primer pri gibanju točke po sklenjeni krivulji homeomorfen S^1, pri gibanju po premici pa $\mathbb{R}$. Predpostavili bomo, da se stanje sistema giblje po prostoru stanj M pod vplivom potenciala $V : M \to \mathbb{R}$. To pomeni, da velja

$$\frac{1}{2}m\alpha\dot{x}^2 + V(x) = E,$$

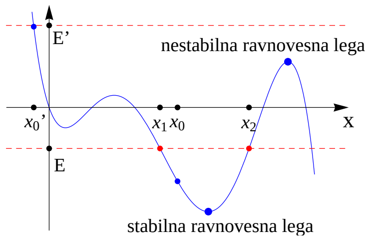
kjer je x parameter, s katerim opišemo prostor stanj M. Ta enačba nas spominja na zakon o ohranitvi energije, čeprav sumanda na levi ne ustrezata nujno kinetični oziroma potencialni energiji točke. Ponavadi do te enačbe pridemo z redukcijo gibanja točke z maso m na parameter x, konstanta α pa pri tem poskrbi, da ima izraz $\frac{1}{2}m\alpha\dot{x}^2$ isto enoto kot energija.

Gibanje sistema lahko obravnavamo kvantitativno in kvalitativno. Natanko lahko gibanje sistema izračunamo z reševanjem zgornje diferencialne enačbe. Nekaj grobih značilnosti gibanja sistema pa lahko razberemo že z grafa potenciala V.

Stacionarne točke potenciala V ustrezajo ravnovesnim legam sistema, in sicer:

· lokalni minimum $V \rightsquigarrow$ stabilna ravnovesna lega,

· lokalni maksimum $V \rightsquigarrow$ nestabilna ravnovesna lega.



Intuitivno si gibanje sistema lahko predstavljamo kot gibanje točke po grafu potenciala pod vplivom sile teže. Projekcija tega gibanja na abscisno os nam pove ali se parameter povečuje ali zmanjšuje, ne pove pa nam hitrosti spreminjanja.

Gibanja so možna pri energijah $E \geq V_{min}$. Če je na primer sistem na začetku v položaju x_0, ima energijo $E > V(x_0)$ in se premika proti desni, se bo premikal proti desni, dokler ne pride do točke x_2, za katero je $V(x_2) = E$. Nato se bo obrnil in se premikal proti levi, dokler ne pride do točke x_1, za katero je $V(x_1) = E$. V nadaljevanju bo gibanje sistema periodično in omejeno na intervalu $[x_1, x_2]$. Če pa je na primer sistem na začetku v položaju x_0' z energijo $E' = V(x_0')$, se bo ves čas gibal proti desni. Pri teh začetnih pogojih je torej gibanje neomejeno.

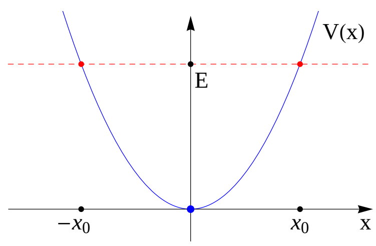
(1) Kvalitativno obravnavaj naslednje potenciale:

(a) $V(x) = \dfrac{1}{2}kx^2, \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $V(\phi) = -mR^2\Omega^2 \cos\phi - \dfrac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2\phi, \quad \Omega < \omega,\ \phi \in S^1$,

(c) $V(r) = \dfrac{l^2}{2mr^2} - \dfrac{\gamma}{r}, \quad r \in (0, \infty)$.

Rešitev: (a) S potencialom $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ modeliramo gibanje materialne točke pod vplivom (linearne) sile vzmeti s koeficientom k.



Z grafa potenciala lahko razberemo naslednje podatke:

· Gibanje je možno za energije $E \geq 0$.

· V $x = 0$ je stabilna ravnovesna lega.

· Za vsako dopustno energijo E je gibanje omejeno na intervalu $[-x_0, x_0]$, kjer je $kx_0^2 = 2E$.

(b) Poiščimo najprej ravnovesne lege sistema. Odvod potenciala je enak

$$V'(\phi) = mR^2\Omega^2 \sin\phi - mR^2\omega^2 \sin\phi\cos\phi = mR^2 \sin\phi(\Omega^2 - \omega^2\cos\phi).$$

Od tod preberemo, da so ravnovesne lege sistema:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 0,\\ \phi_2 &= \pi,\\ \phi_\pm &= \pm \arccos\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2.\end{aligned}$$

Za klasifikacijo ravnovesnih leg moramo izračunati še drugi odvod

$$V''(\phi) = mR^2(\Omega^2\cos\phi - \omega^2\cos 2\phi).$$

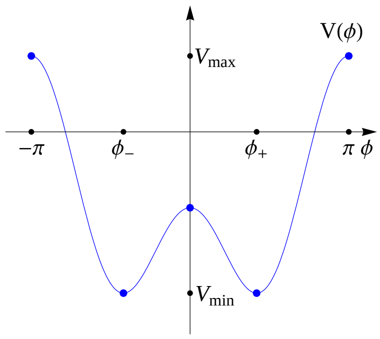
Torej je

$$\begin{aligned}V''(0) &= mR^2(\Omega^2 - \omega^2) < 0,\\ V''(\pi) &= -mR^2(\Omega^2 + \omega^2) < 0,\\ V''(\phi_\pm) &= \frac{mR^2(\omega^4 - \Omega^4)}{\omega^2} > 0.\end{aligned}$$

Potencial je omejen in velja

$$\begin{aligned}V_{min} &= V(\phi_\pm) = -\frac{mR^2(\omega^4 + \Omega^4)}{2\omega^2},\\ V_{max} &= V(\pi) = mR^2\Omega^2.\end{aligned}$$

Sedaj lahko skiciramo graf potenciala na intervalu $[-\pi, \pi]$. V resnici bi morali točki, ki ustrezata parametroma $\pm\pi$, zlepiti.



Kvalitativno lahko o gibanju povemo naslednje:

· Gibanje je možno za energije $E \geq -\dfrac{mR^2(\omega^4 + \Omega^4)}{2\omega^2}$.

· V $\phi = 0$ in $\phi = \pi$ sta nestabilni, v $\phi = \phi_\pm$ pa stabilni ravnovesni legi.

· Ker je prostor stanj omejen, je pri vsaki dopustni energiji gibanje omejeno.

· Pri energijah $E \geq mR^2\Omega^2$ se sistem ves čas giblje v isto smer.

· Pri energijah $V_{min} \leq E < mR^2\Omega^2$ sistem niha med dvema ekstremnima legama.

Do tega potenciala pridemo pri obravnavi gibanja točke po obroču, ki se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti okoli navpične osi. Parameter Ω je tako odvisen od polmera obroča in pa od težnega pospeška. Če obroč miruje, je na dnu obroča stabilna ravnovesna lega. Pri dovolj veliki hitrosti vrtenja ta ravnovesna lega postane nestabilna, pojavita pa se dve novi stabilni ravnovesni legi.

(c) Poglejmo sedaj še potencial $V : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiran s predpisom

$$V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r}.$$

Obe limiti potenciala sta

$$\lim_{r\to 0} V(r) = \infty,$$
$$\lim_{r\to\infty} V(r) = 0.$$

Odvod potenciala je enak

$$V'(r) = -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{\gamma}{r^2},$$

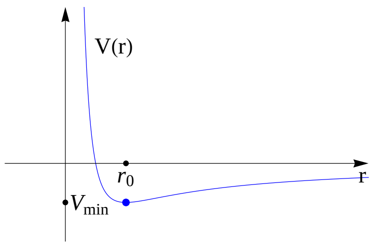
od koder lahko izpeljemo, da ima potencial eno samo stacionarno točko

$$r_0 = \frac{l^2}{m\gamma}.$$

Iz asimptotskih lastnosti potenciala sledi, da ima potencial v r_0 globalni minimum, ki je enak

$$V_{min} = V(r_0) = -\frac{m\gamma^2}{2l^2}.$$

Graf potenciala ima naslednjo obliko.



Kvalitativno lahko o gibanju povemo naslednje:

· Gibanje je možno za energije $E \geq -\frac{m\gamma^2}{2l^2}$.

· V točki $r_0 = \frac{l^2}{m\gamma}$ ima sistem stabilno ravnovesno lego.

· Gibanje je omejeno za dopustne energije $E < 0$ in neomejeno pri energijah $E \geq 0$.

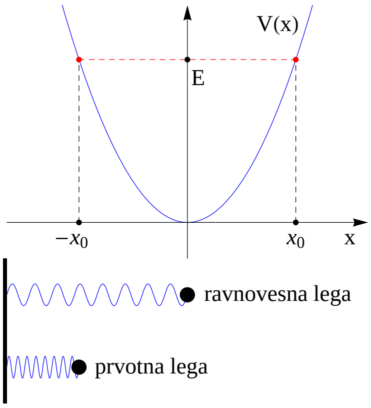
Ta potencial se pojavi pri obravnavi gibanja točke v polju gravitacijske centralne sile. Parameter γ določa jakost gravitacijskega potenciala, medtem ko je l vrtilna količina točke glede na center sile. Energiji $E > 0$ in $E = 0$ ustrezata gibanju točke po hiperboli oziroma paraboli. Pri energiji $E = V_{min}$ je tir točke krožnica, pri energijah $V_{min} < E < 0$ pa elipsa. □

(2) Materialna točka z maso m se giblje pod vplivom potenciala $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

(a) Izračunaj, kako se točka giblje v odvisnosti od časa.

(b) Izračunaj periodo gibanja.

Rešitev: (a) Predstavljajmo si, da je vzmet s koeficientom k postavljena v vodoravni smeri in da se točka lahko premika v smeri vzmeti. Zanimalo nas bo, kakšno je gibanje točke pod vplivom sile vzmeti, če na začetku vzmet stisnemo, nato pa jo spustimo.



Odmik točke iz ravnovesne lege je funkcija časa, ki jo bomo označili z $x = x(t)$. Na začetku vzmet stisnemo za x_0, kar pomeni, da je $x(0) = -x_0$. Ker na začetku točka miruje, nima kinetične energije, zato je $E = \frac{1}{2}kx_0^2$. Energijska enačba je v našem primeru

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E.$$

Iščemo funkcijo $x = x(t)$, ki bo za vsak t zadoščala tej enačbi in bo veljalo $x(0) = -x_0$. Iz enačbe lahko izrazimo

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right),$$
$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}.$$

Pozitivni koren smo vzeli zato, ker vemo, da se bo točka začela gibati v pozitivni smeri x-koordinate. Če sedaj upoštevamo, da je $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, pridemo do enakosti

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}} = dt.$$

Sedaj bomo integrirali obe strani. Na desni dobimo t, na levi pa

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}} = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}}.$$

Upoštevajmo sedaj, da je $x(0) = -x_0$ in $E = \frac{1}{2}kx_0^2$ oziroma $\frac{2E}{k} = x_0^2$. Sledi

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{x}{x_0}\Big|_{x(0)}^{x(t)} = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\arcsin \frac{x(t)}{x_0} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Uvedimo sedaj oznako $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Z integriranjem smo tako prišli do enakosti

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\arcsin \frac{x(t)}{x_0} + \frac{\pi}{2}\right),$$

od koder sledi

$$x(t) = x_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -x_0 \cos \omega t.$$

Vidimo, da bo točka harmonično nihala z amplitudo x_0 in s krožno frekvenco $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

(b) Perioda gibanja je čas, ki je potreben za en nihaj. Ker je gibanje harmonično, bo čas, ko se točka prvič vrne v začetno lego, ustrezal enakosti

$$\omega T = 2\pi$$

oziroma

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Opomniti velja, da je perioda nihanja neodvisna od energije. □

(3) Materialna točka z maso m se giblje pod vplivom potenciala

$$V(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}),$$

kjer sta α in A pozitivni konstanti.

(a) Skiciraj graf potenciala in pokaži, da je gibanje omejeno za $-A \leq E < 0$.

(b) Izračunaj periodo gibanja v primeru $-A \leq E < 0$.

Rešitev: (a) Odvod potenciala V je enak

$$V'(x) = A(-2\alpha e^{-2\alpha x} + 2\alpha e^{-\alpha x}) = 2\alpha A(e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x}),$$

od koder lahko izpeljemo, da ima potencial eno samo stacionarno točko $x = 0$. Iz limit

$$\lim_{x\to-\infty} V(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} V(x) = 0,$$

sklepamo, da ima V v $x = 0$ globalni minimum, ki je enak

$$V_{min} = V(0) = -A.$$

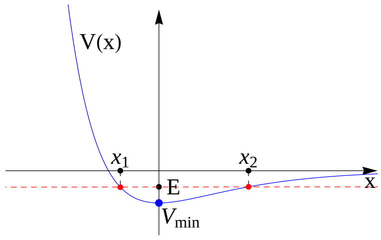
Iz lastnosti potenciala lahko o gibanju sklepamo naslednje:

· Gibanje je možno za energije $E \geq -A$.

· V točki $x = 0$ ima sistem stabilno ravnovesno lego.

· Gibanje je omejeno za energije $-A \leq E < 0$ in neomejeno pri energijah $E \geq 0$.

Poglejmo še graf potenciala.



(b) Izračunajmo sedaj periodo gibanja v primerih, ko je gibanje omejeno. To se zgodi pri energijah $-A \leq E < 0$. V primeru $E = -A$ točka miruje v stabilni ravnovesni legi, zato bodo za nas zanimive energije $-A < E < 0$.

Perioda gibanja materialne točke, ki se giblje pod vplivom potenciala V, je enaka

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}.$$

Tu smo privzeli, da ima točka energijo E in da se giblje po intervalu $[x_1, x_2]$.

Izberimo torej poljubno energijo $E \in (-A, 0)$. Z grafa potenciala lahko preberemo, da ima enačba $E = V(x)$ natanko dve rešitvi x_1 in x_2, ki sta implicitno določeni z enačbo

$$E = Ae^{-2\alpha x_i} - 2Ae^{-\alpha x_i}.$$

Računajmo

$$\begin{aligned} T &= 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}))}}, \\ &= \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - Ae^{-2\alpha x} + 2Ae^{-\alpha x}}}. \end{aligned}$$

Na tem mestu uvedimo novo spremenljivko $s = e^{\alpha x}$, ki nam da $dx = \frac{ds}{\alpha s}$. Novi meji integracije s_1 in s_2 sta potem rešitvi kvadratne enačbe

$$Es_i^2 + 2As_i - A = 0,$$

integral pa se poenostavi v

$$T = \frac{\sqrt{2m}}{\alpha}\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{Es^2 + 2As - A}}.$$

V tabeli nedoločenih integralov lahko preberemo, da za $a < 0$ in $D = b^2 - 4ac > 0$ velja

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{D}}\right) + C.$$

Če želimo izračunati določeni integral takšne iracionalne funkcije na intervalu med ničlama imenovalca, se stvari zelo poenostavijo. Ničli imenovalca sta namreč

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

od koder pa sledi, da je

$$\frac{2ax_1 + b}{\sqrt{D}} = 1,$$
$$\frac{2ax_2 + b}{\sqrt{D}} = -1.$$

To pomeni, da je

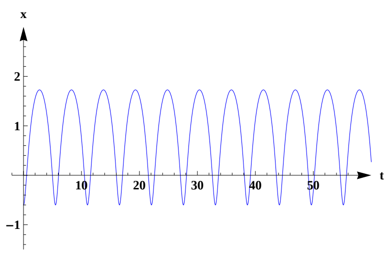
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{D}}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{\pi}{\sqrt{-a}}.$$

V našem konkretnem primeru tako dobimo, da je perioda gibanja enaka

$$T = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{|E|}}.$$

Periodo gibanja smo pri danem potencialu V lahko izračunali natančno. Kot vidimo, je odvisna od energije točke. Natančno gibanje točke pa je v splošnem težko izračunati analitično, vedno pa lahko trajektorijo točke izračunamo numerično.

Če vzamemo parametre $A = 2J$, $\alpha = 1m^{-1}$, $x_1 = -0.6m$ ter $m = 1kg$, lahko numerično določimo graf gibanja točke. Kot vidimo, je gibanje periodično, a ne harmonično. Točka bi v tem primeru večino časa preživela desno od ravnovesne lege.



Kadar periode gibanja ne znamo izračunati natančno, si lahko pomagamo z naslednjo aproksimacijo. V okolici stabilne ravnovesne lege lahko potencial V aproksimiramo s kvadratnim Taylorjevim polinomom, da dobimo

$$V(x) \approx V(0) + \frac{1}{2}V''(0)x^2.$$

V našem primeru je

$$V''(x) = 2\alpha A(-\alpha e^{-\alpha x} + 2\alpha e^{-2\alpha x}),$$

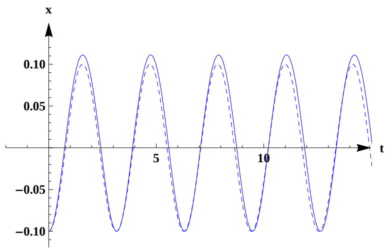
od koder sledi, da je $V''(0) = 2\alpha^2 A$. Drugi odvod $V''(0)$ igra vlogo koeficienta k pri Hookovem potencialu. Od tod lahko dobimo oceno za periodo (frekvenco) pri majhnih nihanjih okoli ravnovesne lege:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\alpha^2 A}} = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{A}}.$$

Če bo amplituda nihanja majhna, bo veljalo $|E| \approx A$, od koder sledi

$$\frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \approx \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{A}}.$$

Na spodnji sliki sta prikazana grafa numerično izračunanega dejanskega gibanja ter pa harmonične aproksimacije gibanja v primeru $x_1 = -0.1m$ (s polno oziroma črtkano črto). Graf dejanskega gibanja zelo spominja na harmonično nihanje, je pa perioda nekoliko večja kot tista, ki smo jo dobili pri aproksimaciji.



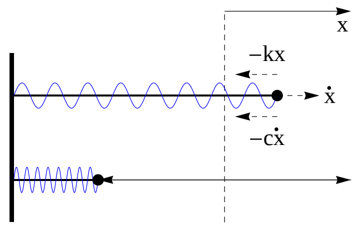
□

(4) Na vzmet s koeficientom k je pripeta materialna točka z maso m, gibanje vzmeti pa zavira blažilec s koeficientom c.

(a) V odvisnosti od parametra c izračunaj, kdaj bo dušenje podkritično, kritično in kdaj nadkritično.

(b) Določi gibanje vzmeti, če jo na začetku stisnemo za x_0 in jo nato spustimo, da niha.

Rešitev: Naš sistem je sestavljen iz masne točke, vzmeti in pa blažilca. Če masno točko izmaknemo iz ravnovesne lege, jo vzmet vleče nazaj v ravnovesje, medtem ko blažilec ves čas zavira gibanje točke. V tem primeru se torej skupna energija točke ne ohranja.



Odmik točke od ravnovesne lege bomo označili z $x = x(t)$. Na točko delujeta sila vzmeti $F_{\text{vz}} = -kx$ in sila blažilca $F_{\text{bl}} = -c\dot{x}$. Predznaka sta obakrat negativna. Pri sili vzmeti zato, ker deluje v nasprotni smeri kot je smer odmika, pri sili blažilca pa zato, ker le-ta zavira gibanje. Za nas je zanimiva le komponenta Newtonovega zakona v smeri raztezanja vzmeti

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x},$$

oziroma

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

kjer smo označili $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

(a) V nadaljevanju bomo obravnavali enačbo $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, ki je primer diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti. Pri reševanju takšnih enačb najprej napišemo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Rešitvama te kvadratne enačbe rečemo karakteristični števili. Splošna rešitev enačbe je odvisna od karakterističnih števil, zapišemo pa jo lahko v obliki:

- $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, če sta $\lambda_1 \neq \lambda_2$ realni števili.
- $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$, če je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
- $x(t) = C_1 e^{\lambda t}\cos\omega t + C_2 e^{\lambda t}\sin\omega t$, če je $\lambda_1 = \lambda + i\omega$ in $\lambda_2 = \lambda - i\omega$.

V našem primeru sta karakteristični števili

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}.$$

V odvisnosti od parametra c se lahko zgodijo naslednje možnosti:

- $c = 0$ prosto nihanje,
- $c < 2m\omega_0$ podkritično dušenje,
- $c = 2m\omega_0$ kritično dušenje,
- $c > 2m\omega_0$ nadkritično dušenje.

Vidimo, da nadkritično dušenje ustreza primeru, ko sta karakteristični števili enačbe obe realni in različni. Pri kritičnem dušenju imamo eno dvojno realno ničlo, pri podkritičnem dušenju pa sta karakteristični števili konjugirani kompleksni števili.

(b) Splošna rešitev diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti je odvisna še od dveh parametrov C_1 in C_2. Ponavadi ju izračunamo s pomočjo začetnih pogojev. V našem primeru vzmet stisnemo za x_0 in jo nato spustimo. To prepišemo v začetna pogoja

$$\begin{aligned} x(0) &= -x_0, \\ \dot{x}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Če bi na začetku vzmet še potisnili v neki smeri, bi bil tudi člen $\dot{x}(0)$ neničeln.

Prosto nihanje:

V tem primeru je splošna rešitev enačbe

$$x(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t,$$

njen odvod pa je enak

$$\dot{x}(t) = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0 \cos\omega_0 t.$$

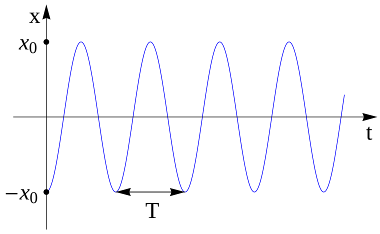
Pri $t = 0$ tako dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1 &= -x_0, \\ C_2\omega_0 &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = -x_0$, $C_2 = 0$. Tako smo še enkrat izračunali, da je prosto nihanje vzmeti določeno s predpisom

$$x(t) = -x_0 \cos\omega_0 t.$$

Točka v tem primeru harmonično niha s konstantno amplitudo.



<u>Podkritično dušenje:</u>

Naj bo sedaj $c < 2m\omega_0$. Potem ima karakteristična enačba $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$ konjugirano kompleksni rešitvi:

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \lambda + i\omega,$$
$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \lambda - i\omega,$$

kjer smo označili $\lambda = -\frac{c}{2m}$ in $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$. Splošna rešitev in njen odvod sta enaka

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t}\cos\omega t + C_2 e^{\lambda t}\sin\omega t,$$
$$\dot{x}(t) = C_1\lambda e^{\lambda t}\cos\omega t - C_1\omega e^{\lambda t}\sin\omega t + C_2\lambda e^{\lambda t}\sin\omega t + C_2\omega e^{\lambda t}\cos\omega t.$$

Pri $t = 0$ dobimo sistem enačb:

$$C_1 = -x_0,$$
$$C_1\lambda + C_2\omega = 0,$$

ki ima rešitev $C_1 = -x_0$, $C_2 = \frac{\lambda}{\omega}x_0$. Rešitev diferencialne enačbe pa je

$$x(t) = -x_0 e^{\lambda t}\left(\cos\omega t - \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right).$$

V oklepaju imamo vsoto sinusa in kosinusa z isto frekvenco. Takšno situacijo smatramo kot običajno nihanje, le da se spremenita amplituda in pa faza nihanja. Izraz v oklepaju lahko namreč zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}\cos\omega t - \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}}}\cos\omega t - \frac{\frac{\lambda}{\omega}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}}}\sin\omega t\right),\\ &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}\left(\cos\delta\cos\omega t - \sin\delta\sin\omega t\right),\\ &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}\cos(\omega t + \delta).\end{aligned}$$

Začetna faza nihanja δ je definirana implicitno z enačbama

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}}},$$
$$\sin\delta = \frac{\frac{\lambda}{\omega}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}}}.$$

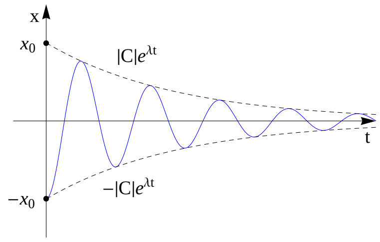
Od tod sledi, da je $\operatorname{tg}\delta = \frac{\lambda}{\omega}$. Podkritično dušeno nihanje lahko sedaj zapišemo v kompaktni obliki

$$x(t) = Ce^{\lambda t}\cos(\omega t + \delta),$$

kjer je $C = -x_0\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}$. Vidimo, da je krožna frekvenca dušenega nihanja

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

nekoliko manjša kot pri prostem nihanju. Amplituda nihanja se zmanjšuje eksponentno s koeficientom $\lambda = -\frac{c}{2m}$. Če je dušenje šibko, se C in $-x_0$ le malo razlikujeta.



Kritično dušenje:

V primeru kritičnega dušenja je $c = 2m\omega_0$. Karakteristična enačba $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$ ima dvojno rešitev

$$\lambda = -\frac{c}{2m}.$$

V tem primeru sta

$$\begin{aligned} x(t) &= (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \\ \dot{x}(t) &= \lambda C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t} + C_2 \lambda t e^{\lambda t} \end{aligned}$$

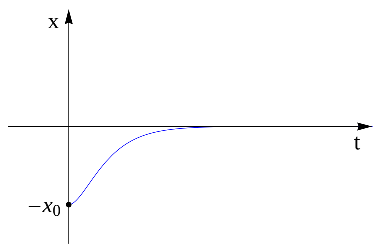
splošna rešitev oziroma njen odvod. Pri $t = 0$ dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1 &= -x_0, \\ \lambda C_1 + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = -x_0$, $C_2 = \lambda x_0$. Rešitev diferencialne enačbe je v tem primeru

$$x(t) = -x_0 e^{\lambda t}(1 - \lambda t).$$

V tem primeru se nihalo iz začetne lege vrne v ravnovesno lego, ne da bi jo prečkalo.



Nadkritično dušenje:

V tem primeru je $c > 2m\omega_0$. Karakteristična enačba $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$ ima dve različni realni rešitvi

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2},$$
$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}.$$

Splošna rešitev in pa njen odvod sta enaka

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$
$$\dot{x}(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

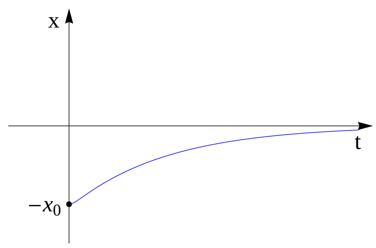
Tokrat dobimo pri $t = 0$ sistem enačb:

$$C_1 + C_2 = -x_0,$$
$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0,$$

ki ima rešitev $C_1 = -\frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $C_2 = -\frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Nadkritično dušeno nihanje je torej dano s funkcijo

$$x(t) = -x_0 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right).$$

V tem primeru se nihalo iz začetne lege vrne v ravnovesno lego, ne da bi jo prečkalo, vendar pa se vrača dlje kot v primeru kritičnega dušenja.



$\square$