Izrek 3.6 *Če ima polje f v točki $\boldsymbol{a}$ lokalni ekstrem pri pogojih (3.4) in so vektorji $\boldsymbol{\nabla} g_1, \ldots, \boldsymbol{\nabla} g_m$ v točki $\boldsymbol{a}$ linearno neodvisni, potem obstajajo skalarji (Lagrangeevi parametri) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, da je*

$$\boldsymbol{\nabla} f + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \boldsymbol{\nabla} g_j = 0.$$

3.5 Diskretna verižnica

Obliko prosto obešene gibke vrvi imenujemo *verižnica*.

Isto nalogo, le da je vrv sestavljena iz gibko vpetih togih členkov, palic, imenujemo *diskretna verižnica*.

Naj bo diskretna verižnica sestavljena iz $n+1$ členkov dolžin

$$L_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

in mas

$$M_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Nalogo bomo rešili, če bomo izračunali koordinate krajišč

$$(x_i, y_i)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1,$$

kjer sta obesišči, to je točki (x_0, y_0) in (x_{n+1}, y_{n+1}), kajpada predpisani vnaprej.

Ravnotežni pogoj dobimo, če zahtevamo, da je *težišče* kar se da nizko ali, kar je isto, da je potencialna energija minimalna.

Minimizirati torej želimo

$$\min_{x,y} F(x,y) = \min_{x,y} \sum_{i=1}^{n+1} M_i \frac{y_{i-1} + y_i}{2}, \tag{3.5}$$

saj sila teže prijemlje v težišču vsake palice.

Iskane koordinate (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, morajo pri tem zadoščati pogojem

$$(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 = L_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{3.6}$$

Vezani ekstrem (3.5)–(3.6) prevedemo na nevezanega z uvedbo Lagrangeevih multiplikatorjev. Tedaj iščemo *nevezani* ekstrem funkcije

$$G(x,y,\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(M_j \frac{y_{j-1} + y_j}{2} + \lambda_j \left((x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 - L_j^2 \right) \right). \tag{3.7}$$

Ravnotežne enačbe dobimo kot enačbe

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial y_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
\frac{\partial G}{\partial \lambda i} &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,
\end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned}
\lambda_i\left(x_i - x_{i-1}\right) - \lambda_{i+1}\left(x_{i+1} - x_i\right) &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
\lambda_i\left(y_i - y_{i-1}\right) - \lambda_{i+1}\left(y_{i+1} - y_i\right) &= -\frac{M_i + M_{i+1}}{4}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(y_i - y_{i-1}\right)^2 &= L_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.
\end{aligned}$$

To je sistem $3n+1$ enačb za $3n+1$ neznank.

Za lažje računanje uvedemo relativne koordinate

$$\begin{aligned}
\xi_i &= x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \\
\eta_i &= y_i - y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,
\end{aligned}$$

od koder sledi

$$x_i = x_0 + \sum_{j=1}^{i} \xi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{3.8}$$

$$y_i = y_0 + \sum_{j=1}^{i} \eta_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{3.9}$$

in zgornji sistem enačb preide v ekvivalentni sistem

$$\lambda_i \xi_i - \lambda_{i+1}\xi_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.10}$$

$$\lambda_i \eta_i - \lambda_{i+1}\eta_{i+1} = -\frac{1}{2}\mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.11}$$

$$\xi_i^2 + \eta_i^2 = L_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{3.12}$$

kjer je

$$\mu_i = \frac{M_i + M_{i+1}}{2}. \tag{3.13}$$

Ta sistem $3n+1$ enačb za neznanke ξ_i, η_i in λ_i bomo rešili tako, da bomo vse neznanke izrazili z dvema novima neznankama u in v.

Iz enačbe (3.10) sledi

$$\lambda_i \xi_i = -\frac{1}{2u}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{3.14}$$

kjer je u neznanka, ki jo bomo še določili. Iz enačb (3.14) potem sledi

$$\lambda_i = -\frac{1}{2u\xi_i} \tag{3.15}$$

in iz enačb (3.11) dobimo

$$-\frac{1}{2u}\frac{\eta_i}{\xi_i} + \frac{1}{2u}\frac{\eta_{i+1}}{\xi_{i+1}} = -\frac{1}{2}\mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ali

$$\frac{\eta_{i+1}}{\xi_{i+1}} = \frac{\eta_i}{\xi_i} - u\mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

in končno

$$\frac{\eta_i}{\xi_i} = v - u\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{3.16}$$

kjer bomo neznanko

$$v := \frac{\eta_1}{\xi_1} \tag{3.17}$$

še določili.

Enačbi (3.12) in (3.16) nam sedaj povesta

$$1 + \left(v - u\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j\right)^2 = \frac{L_i^2}{\xi_i^2},$$

od koder sledi

$$\xi_i = \frac{L_i}{\sqrt{1 + \left(v - u\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j\right)^2}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{3.18}$$

vrednosti η_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, pa sedaj izračunamo iz enačbe (3.16)

$$\eta_i = \xi_i\left(v - u\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j\right), \quad i = 1, \ldots, n+1. \tag{3.19}$$

(Neznanke λ_i lahko, če želimo, izrazimo z u in v po enačbi (3.15).)

Za neznanki u in v sedaj iz enačb (3.8) in (3.9) dobimo enačbi

$$U(u,v) = 0, \tag{3.20}$$

$$V(u,v) = 0, \tag{3.21}$$

kjer je

$$U(u,v) = \sum_{i=1}^{n+1}\xi_i - (x_{n+1} - x_0), \tag{3.22}$$

$$V(u,v) = \sum_{i=1}^{n+1}\eta_i - (y_{n+1} - y_0), \tag{3.23}$$

kjer se ξ_i in η_i izražajo z u in v po enačbah (3.18) in (3.19).

Naloge

3.1 Analiziraj (in reši) simetrično diskretno verižnico s sodim številom $n+1 = 2p,\ p \in \mathbb{N}$ palic:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_0, \\ L_i &= L_{n+2-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \\ M_i &= M_{n+2-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem simetrije lahko prevedemo nalogo na eno samo enačbo za neznanko $w = \lambda_i \xi_i$, kar je po enačbi (3.10) neodvisno od indeksa i.

3.2 Analiziraj (in reši) simetrično diskretno verižnico z lihim številom $n+1 = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}$ palic:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_0, \\ L_i &= L_{n+2-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \\ M_i &= M_{n+2-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem simetrije lahko prevedemo nalogo na eno samo enačbo za neznanko $w = \lambda_i \xi_i$, kar je po enačbi (3.10) neodvisno od indeksa i.

3.3 Dokaži, da je diskretna verižnica rešljiva natanko takrat, ko noben členek, vključno s fiktivnim členkom, ki direktno povezuje obe obesišči, ni daljši od vsote preostalih členkov ("poligonska" neenakost).

3.4 Analiziraj diskretno verižnico, ki je na levem krajišču normalno pritrjena, na desnem krajišču pa je privezana na neraztegljivo nitko, ki je speljana čez škripec, na drugem koncu nitke pa je obešena utež z maso m.

3.5 V študentskih letih nam je prof. I. Kuščer zastavil naslednjo nalogo: Kocko z robovi iz žice za hip potopimo v milnico. Ko kocko izvlečemo iz milnice, dobimo sliko, kot jo prikazuje slika 3.1.

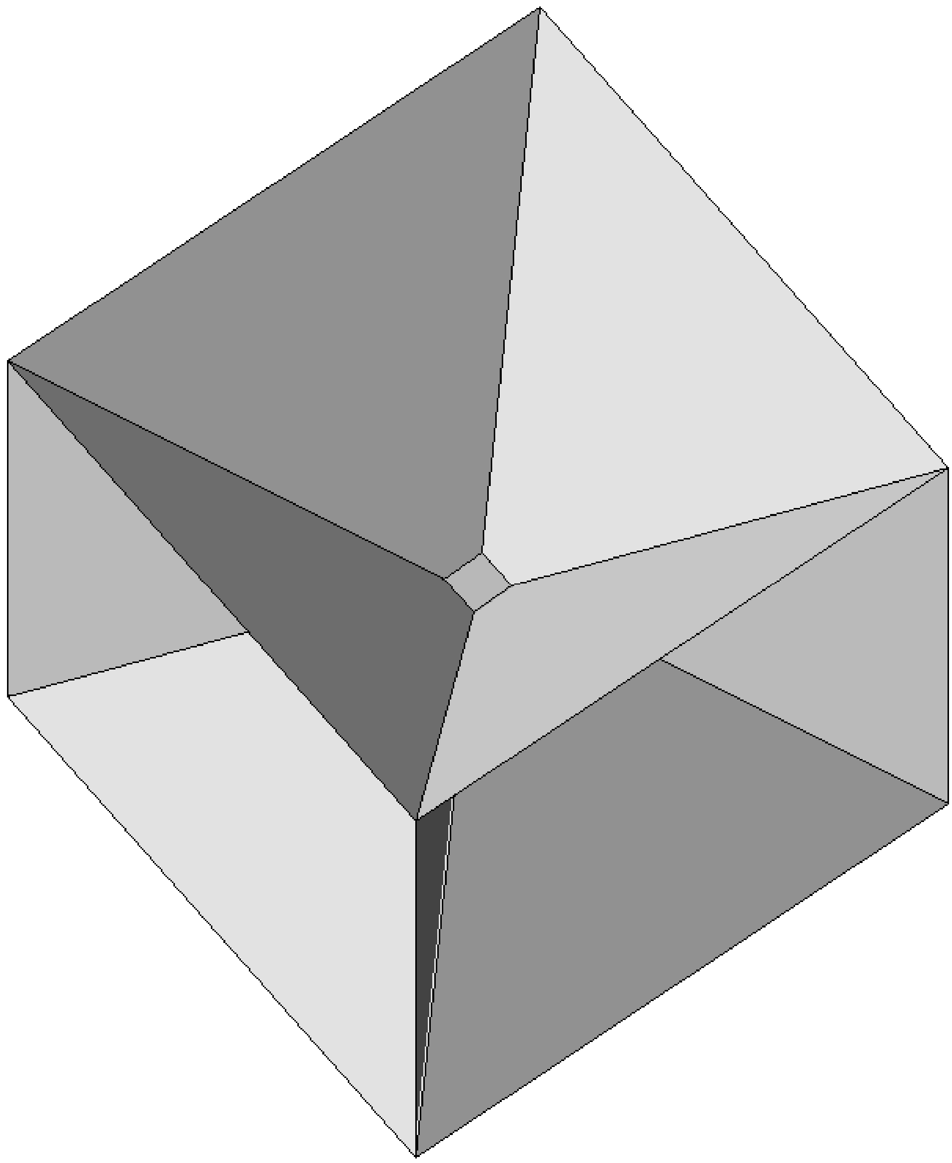
Vprašanje je bilo, kolikšen je rob malega kvadrata na sredini.

Vsi, s profesorjem vred, smo menili, da mora biti površina minimalna. Mnogo let kasneje je neka bistra glava trdila, da morajo biti sile v ravnotežju, zato se morajo vse ploskve stikati pod kotom 120°. Rezultat je drugačen in dolgo je med študenti krožilo vprašanje, kateri rezultat je pravilen.

Končno je prof. Kodre rekel, da sta oba rezultata napačna: kvadrat na sredini ni kvadrat, ker nima ravnih stranic. Trapezi, ki so nanj prilepljeni, niso ravninski liki, ker je vse skupaj malo upognjeno.

Naloga ima sedaj tri dele, kjer je tretji del precej težji.

1. Izračunaj stranico malega kvadrata iz zahteve, da je površina minimalna. Izračunaj, kakšna je minimalna površina in pod kakšnimi koti se stikajo ploskve.



Slika 3.1: Milnica na skeletu kocke

2. Izračunaj stranico malega kvadrata iz zahteve, da se stranice stikajo pod kotom 120^o. Izračunaj, kakšna je sedaj površina.

3. Izračunaj stranico malega "kvadrata" iz zahteve, da je površina minimalna, dopuščaj pa neravne robove in neravninske like. Naloga je formalno zelo komplicirana, ker bi bilo treba reševati nelinearne parcialne diferencialne enačbe.

Za približno rešitev pa je dovolj triangulirati rešitev, ki jo dobimo v 1. delu, koordinate vozlišč v notranjosti vzeti za spremenljivke, izraziti površino z njimi ter poiskati minimalno vrednost. Začetne vrednosti so točke, ki jih dobimo z napačno teorijo v 1. delu. Kolika je sedaj površina in pod kakšnim kotom se stikajo ploskve?

3.6 Newtonova metoda

Enačbi (3.20–3.21) bomo rešili z Newtonovo metodo. Naj bo $(\tilde{u}, \tilde{v})$ rešitev sistema (3.20–3.21). Po Taylorjevi formuli velja

$$\begin{aligned} U(\tilde{u}, \tilde{v}) &= U(u,v) + \frac{\partial U(u,v)}{\partial u}(\tilde{u} - u) + \frac{\partial U(u,v)}{\partial v}(\tilde{v} - v) + \cdots = 0, \\ V(\tilde{u}, \tilde{v}) &= V(u,v) + \frac{\partial V(u,v)}{\partial u}(\tilde{u} - u) + \frac{\partial V(u,v)}{\partial v}(\tilde{v} - v) + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Če označimo

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

in zanemarimo člene s $\cdots$, izračunani vektor

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}$$

ne bo točna rešitev ampak, upajmo, boljši približek. Ta boljši približek dobimo po formuli (3.24), kjer je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}.$$

Formuli (3.18) in (3.19) bomo poenostavili z uvedbo pomožnih spremenljivk

$$w_i = v - u\nu_i, \ i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{3.25}$$

kjer so

$$\nu_i = \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j, \ i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{3.26}$$

znane konstante. Potem lahko pišemo

$$\begin{aligned} \xi_i &= L_i \left(1 + w_i^2\right)^{-1/2}, \\ \eta_i &= L_i w_i \left(1 + w_i^2\right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dw_i} &= -L_i w_i \left(1 + w_i^2\right)^{-3/2}, \\ \frac{d\eta_i}{dw_i} &= L_i \left(1 + w_i^2\right)^{-3/2} \end{aligned}$$

in

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} & \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial u} & \frac{\partial \eta_i}{\partial v} \end{bmatrix} = L_i \left(1 + w_i^2\right)^{-3/2} \begin{bmatrix} w_i \nu_i & -w_i \\ -\nu_i & 1 \end{bmatrix}.$$

Za Jacobijan potem dobimo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n+1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} & \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial u} & \frac{\partial \eta_i}{\partial v} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} L_i \left(1 + w_i^2\right)^{-3/2} \begin{bmatrix} w_i \nu_i & -w_i \\ -\nu_i & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

medtem ko je

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} L_i \left(1 + w_i^2\right)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ w_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

kjer je

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} - x_0 \\ y_{n+1} - y_0 \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Na sliki 3.2 vidimo diskretno verižnico s podatki

$$L = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

in

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Naloge

3.6 Izračunaj in nariši diskretno verižnico z 10 členki dolžin 1 in mas 1. Verižnica je pritrjena nesimetrično v točkah $(0,0)$ in $(6,3)$. Nalogo reši tako, da direktno, z uporabo Matlaba, minimiziraš funkcijo (3.5) pri pogojih (3.6).

3.7 Nalogo 3.6 reši tako, da direktno, z uporabo Matlaba, rešiš sistem enačb (3.10), (3.11), (3.12).