Metoda končnih elementov za telebane

Ogledali si bomo idejo metode končnih elementov na poenostavljenem modelu deformacije na enem koncu vpete žice pod obremenitvijo $q(x)$, kjer je drugi konec prost in nanj ne deluje nobena sila. Upogib palice modeliramo z diferencialno enačbo z robnimi pogoji:

$$w''(x) = q(x)$$
$$w(0) = w'(1) = 0$$

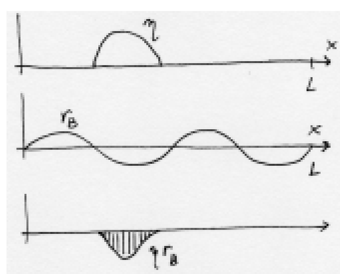
Galerkinova metoda

Za poljubno funkcijo $w(x)$ definiramo **residual** $r(x) = w''(x) - q(x)$. Če je $w(x)$ rešitev diferencialne enačbe, je residual očitno identično enak 0.

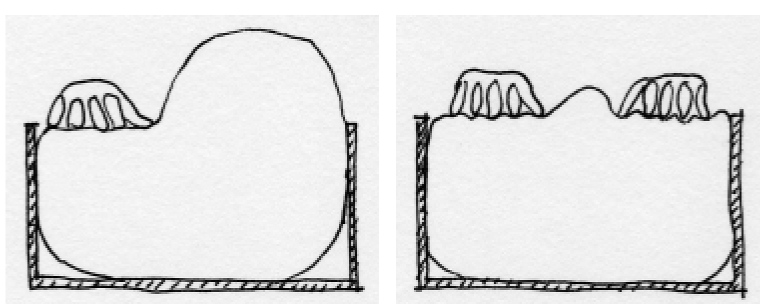
Radi bi poiskali preprost in hitro izračunljiv test, ki nam bom omogočil oceniti residual samo s pomočjo integralov. Spomnimo se, da velja $\int_0^1 \delta_{x_0}(x) r(x) = r(x_0)$, kjer je

$$\delta_{x_0}(x) = \begin{cases} +\infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}.$$

To že pomeni, da če velja $\int_0^1 \eta(x) r(x) = 0$ za vsako **testno funkcijo** $\eta(x)$, potem sledi, da je $r(x) \equiv 0$. To nam ne pomaga preveč, saj bi morali enakost preizkusiti za neskončno število funkcij. Naša rešitev bo le približna, zato bi radi izračunali le končno število integralov in s tem zagotovili majhnost residuala.



Ideja je podobna naslednji nalogi. Predstavljate si, da moramo stlačiti balon v škatlo. Testne funkcije so naši prsti. Več prstov bomo uporabili, bolj bo balon stlačen v škatlo. To je neformalna formulacija problema.



Naši funkciji, ki je kandidat za aproksimacijo, rečemo **poskusna funkcija**. Tipično je zapisana v neki končni bazi. Na prvi pogled se zdi, da mora biti naša funkcija dvakrat zvezno odvedljiva, saj v parcialni enačbi nastopa drugi odvod. Temu se bi radi izognil, zato bomo problem s pomočjo integriranja po delih in upoštevanja robnih pogojev transformirali na bolj enostavnega. Primerna matematična formulacija problema sledi iz **teorije prostorov Soboljeva**. Pri integriranju upoštevamo, da za točno rešitev velja $w(0) = w'(1) = 0$. Vse naše testne funkcije bom izbrali tako, da bo veljalo $\eta(0) = 0$, tako avtomatsko zadostimo robnemu pogoju in izračun poneostavimo.

$$\int_0^1 \eta(x)r(x)\ dx = \int_0^1 \eta(x)(w''(x) - q(x))\ dx = \int_0^1 \eta(x)w''(x)\ dx - \int_0^1 \eta(x)q(x)\ dx$$

$$\int_0^1 \eta(x)w''(x)\ dx = \big[\eta(x)w'(x)\big]_0^1 - \int_0^1 \eta'(x)w'(x)\ dx = -\int_0^1 \eta'(x)w'(x)\ dx$$

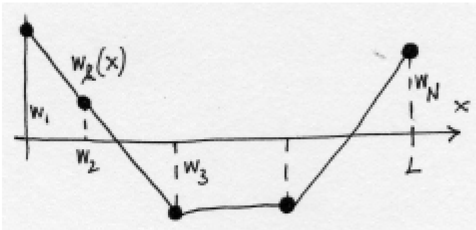
Tako smo na koncu dobil, da mora veljati:

$$\int_0^1 \eta'(x)w'(x)\ dx + \int_0^1 \eta(x)q(x)\ dx = 0.$$

Sistem se bo zelo poenostavil, če bomo vzeli bazne funkcije kar enake testnim funkcijam. Upoštevali smo že robne pogoje, tako je $\alpha_0 = 0$. Tako je zdaj naš približek enak:

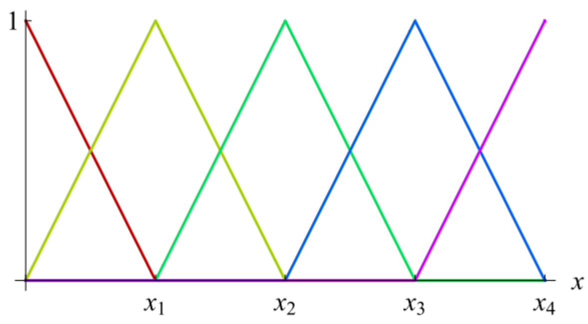
$$w(x) \approx \sum_{i=1}^{N} \alpha_i H_i(x)$$

Rešitev bomo iskalo v prostoru odsekoma linearnih funkcij.



Za bazne funkcije izberemo:

$$\eta_i(x) = H_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} < x < x_i \\ 1, & x = x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}.$$



Funkcije so očitno linearno neodvisne.

Ostane nam še samo način, kako poračunati integrale. Splošno kvadraturno pravilo za približen izračun integrala

$$\int_{-1}^{1} f(\zeta)\ d\zeta \approx \sum_{k=0}^{M} \gamma_k f(\zeta_k),$$

kjer so ζ_k, $k = 0, \ldots, M$ delilne točke intervala. Splošno pravilo dobimo s transformacijo intervala $[-1, 1]$ na interval $[a, b]$, $x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\zeta$.

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx \approx \frac{1}{2}(b-a) \sum_{k=0}^{M} \gamma_k f(x_k),$$

Ponavadi uporabimo kar Gaussove kvadraturne formule. Lahko pa tudi Newton-Cotesove formule.

Pasovna oblika sistema

Tako smo dobili, da mora veljati:

$$\int_{0}^{1} H_j'(x) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i H_i'(x)\ dx + \int_{0}^{1} H_j(x) q(x)\ dx = 0, \forall i, j$$

To že implicira pasovno obliko, saj velja $\int_0^1 H_j'(x) H_i'(x) = 0$ za $|i-j| > 1$. Naj bodo točke ekvidistantne $x_i = i * h$. Tako velja

$$\int_{0}^{1} H_{i+1}'(x) H_i'(x)\ dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_{i+1}'(x) H_i'(x)\ dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h^2}\ dx = -(x_{i+1} - x_i)/h^2 = -\frac{1}{h},$$

$$\int_{0}^{1} H_i'(x) H_i'(x)\ dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h}\ dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-\frac{1}{h})(-\frac{1}{h})\ dx = \frac{2}{h}, i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\int_{0}^{1} H_0'(x) H_0'(x)\ dx = -\frac{1}{h},$$

$$\int_{0}^{1} H_N'(x) H_N'(x)\ dx = \frac{1}{h}.$$

Numerično reševanje problema

Za poljubno bazo lahko zdaj definiramo matriko K. Mi si izberemo $\eta_i(x) = H_i(x)$.

$$K_{ji} = \int_{0}^{1} \eta_j'(x) \eta_i'(x)\ dx, i, j = 1, \ldots, N.$$

Matrika K je v našem primeru simetrična in tridiagonalna. Naj bo

$$b_j = -\int_{0}^{1} \eta_j(x) q(x)\ dx.$$

Potem našo rešitev dobimo tako, da rešimo sistem

$$K\alpha = b.$$

Naša približna rešitev je tako

$$w(x) \approx \sum_{i=1}^{N} \alpha_i H_i(x)$$

Kaj pa robni pogoj $w'(1) = 0$? Tega bomo implicitno aproksimirali, ko bomo rešili šibko nalogo.

Reševanje s Hermiteovo interpolacijo

Na kratko opišimo še, kako bi zgledale bazne funkcije za Hermiteovo interpolacijo. Definiramo bazno funkcijo povezano z funkcijskimi vrednostmi,

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0, & x_0 < x < x_{j-1} \\ h_{01}(\frac{x-x_{j-1}}{h_j}), & x_{j-1} < x < x_j, \\ h_{00}(\frac{x-x_j}{h_{j+1}}), & x_j < x < x_{j+1}, \\ 0, & x_{j+1} < x < x_n \end{cases}.$$

in bazno funkcijo, ki je povezana z odvodom funkcije,

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 0, & x_0 < x < x_{j-1} \\ h_j h_{11}(\frac{x-x_{j-1}}{h_j}), & x_{j-1} < x < x_j, \\ h_{j+1} h_{10}(\frac{x-x_j}{h_{j+1}}), & x_j < x < x_{j+1}, \\ 0, & x_{j+1} < x < x_n \end{cases}.$$

Bazne funkcije pa so tiste od prejšnjič,

$$h_{00}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad h_{10}(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad h_{01}(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad h_{11}(t) = t^3 - t^2.$$

Preizkusi še rešitev dobljeno s Hermitovimi baznimi zlepki,

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \psi_j(x).$$

Reševanje s Hermiteovo interpolacijo, upogib nosilca

Preizkusimo idejo še na primeru od prejšnjič, na diferencialni enačbi $(EIw'')'' + (Pw')' = q$. Testne funkcije v si izberemo take, da zadoščajo robnim pogojem, $v(0) = v(\ell) = 0$. Namig, rešitev išči v obliki

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x) + \sum_{j=0}^{n} \beta_j \psi_j(x).$$

$$\begin{aligned} \int_0^\ell ((EIw'')'' + (Pw')') * v \, dx &= \left[\left((EIw'')' + Pw'\right) * v\right]_0^\ell - \int_0^\ell \left((EIw'')' + (Pw')\right) * v' \, dx && (1) \\ &= -\int_0^\ell (EIw'')' * v' \, dx - \int_0^\ell Pw' * v' \, dx && (2) \\ & && (3) \end{aligned}$$

Upoštevamo še:

$$\int_0^\ell (EIw'')' * v' \, dx = \left[(EIw'') * v'\right]_0^\ell - \int_0^\ell (EIw'') * v'' \, dx = -\int_0^\ell (EIw'') * v'' \, dx$$

Numerična rešitev s prevedbo na sistem

Tako na koncu dobimo:

$$a(u,v) = \int_0^\ell ((EIw'')'' + (Pw')') * v \; dx = \int_0^\ell (EIw'') * v'' \; dx - \int_0^\ell Pw' * v' \; dx,$$

kjer je a blinearni funkcional. Tako bomo na koncu reševali sistem:

$$a(w, v_j) = \int_0^\ell q v_j \; dx$$

Hitro lahko vidimo, da je reševanje diferencialne enačb ekvivalentno minimizaciji energijskega funkcionala:

$$F(w) = \int_0^\ell \frac{1}{2} a(w,w) - qw \; dx,$$

saj je za dovoljkrat zvezno odvedljivo funkcijo optimizacija linernega funkcionala ekvivalentna reševanju pripadajočih Euler-Lagrangevih enačb:

$$\left(\frac{\partial F(w)}{\partial w''}\right)'' - \left(\frac{\partial F(w)}{\partial w'}\right)' = -\frac{\partial F(w)}{\partial w} = (EIw'')'' + (Pw')' = q(x).$$

Metoda končnih elementov, naloge

- Implementiraj metodo končnih elementov za modelni primer z uporabo Hermiteovih baznih funkcij. Pri učinkoviti implementaciji ne pozabi upoštevati, da je večina skalarnih produktov enaka 0. Tako na koncu dobiš pasovni sistem.

- Implementiraj metodo končnih elementov še za primer nosilca z uporabo Hermiteovih baznih funkcij. Pri učinkoviti implementaciji ne pozabi upoštevati, da je večina skalarnih produktov enaka 0. Tako na koncu dobiš pasovni sistem.

- Preizkusi minimizacijo funkcional na modelnem primeru. Enkrat kar z Minimize. Drugič pa učinkovito, tako da upoštevaš, kje so parcialni odvodi enaki 0. Zgradi tudi razpršeno obliko sistem. Preveri, da sta pristopa z MKE in minimizacijo funkcional ekvivalentna.

- Implementiraj reševanje z minimizacijo funkcionala za primer upogiba nosilca. Enkrat kar z Minimize. Drugič pa učinkovito, tako da upoštevaš, kje so parcialni odvodi enaki 0. Zgradi tudi razpršeno obliko sistema.

  Tipično boš imel za bolj podrobne delitve težave s počasnostjo neučinkovitih implementacij. Cilj je, da metoda hitro deluje za veliko število točk delitve,$n > 10000$. Težave se bodo včasih pojavile že pri $n = 50, 100$.

  Pri učinkoviti implementaciji se poizkusi izogniti simboličnim funkcijam.