Nosilci

George Mejak

Kazalo

1 Kinematika upogiba nosilca

Nosilec je deformabilno telo, dimenzija katerega je v eni koordinatni smeri bistveno večja, v razmerju vsaj 1:10, kot v ostalih dveh. Tej smeri pravimo os nosilca. Deformacijo opišemo s primerjavo trenutnega položaja, pravimo mu tudi prostorski položaj, z referenčnim položajem. Dogovor je, da za zapis količin nosilca v referenčnem položaju uporabljamo velike črke, enakopomenske količine v prostorskem položaju pa zapisujemo s pripadajočimi malimi črkami.

Opis velikih deformacij zahteva znanje mehanike kontinuuma, zato se bomo omejili na poenostavljen model, na ravninske nosilce in majhne deformacije v prečni smeri na os nosilca, to je na upogib nosilca. Ravninski nosilec je dejansko prostorski nosilec z ravnino simetrijo, ki je invariantna za deformacije. Potrebovali bomo še dodatne kinematične predpostavke.

(K.1) Dolžina osi nosilca se pri deformaciji ne spremeni; pravimo, da je os nosilca nevtralna os.

(K.2) Preseki, ki so pravokotni na nevtralno os v referenčnem položaju, ostanejo pri deformaciji pravokotni na deformirano nevtralno os.

V referenčnem položaju postavimo koordinatno os X v smeri nevtralne osi, os Z v smeri upogiba, os Y pa pravokotno na ravnino nosilca. Osi usmerimo tako, da je pripadajoči koordinatni sistem pozitivno orientiran. Bazne vektorje

v koordinatnih smereh označimo z $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$. Krajevni vektor $\vec{R}$ do poljubne točke P nosilca potem zapišimo v obliki

$$\vec{R} = X\vec{i} + Z\vec{k}. \tag{1}$$

Pri deformaciji se nevtralna os, ki ji pravimo tudi upogibnica, deformira v $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(X)$. Po predpostavki (**K.2**) položaj P preide v položaj p določen s krajevnim vektorjem

$$\vec{r} = \vec{r}_0(X) + Z\vec{n}(X), \tag{2}$$

kjer je $\vec{n}$ pravokoten na tangentno $\vec{e}_t$ nevtralne osi in je orientiran tako, da je $\vec{n} \times \vec{e}_t = \vec{j}$.

Deformacijo merimo z relativno spremembo dolžinskega elementa

$$\epsilon = \frac{|\, d\vec{r}\,| - \left|\, d\vec{R}\,\right|}{\left|\, d\vec{R}\,\right|}. \tag{3}$$

Izračunajmo jo v smeri vlakna $Z = Z_0$. Upoštevajmo, da je $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_0}{\mathrm{dX}} = \vec{e}_t$, saj je $\vec{r}_0$ nevtralna os in je zato X ločna dolžina nevtralne os in $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{n}}}{\mathrm{dX}} = -\kappa(\vec{n} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_t$. Tu je $\kappa \geq 0$ ukrivljenost, $\vec{e}_n$ pa normala na nevtralno os. Potem $d\vec{r} = (1 - \kappa(\vec{n} \cdot \vec{e}_n)Z_0)dX\vec{e}_t$ in ker smo se omejili na majhne deformacije(ali pa na vitek nosilec) $|\, d\vec{r}\,| = 1 - \kappa(\vec{n} \cdot \vec{e}_n)Z_0 \,|\, dX\,|$. Tako dobimo

$$\epsilon = -\kappa(\vec{n} \cdot \vec{e}_n)Z_0. \tag{4}$$

Videli smo, da je koordinata X enaka ločni dolžini upogibnice. V nadaljevanju bomo zato namesto kordinate X pisali s. Označimo s θ kot, ki ga oklepa tangenta upogibnice s smerjo $\vec{i}$. Potem je

$$(\vec{n} \cdot \vec{e}_n)\kappa = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\,. \tag{5}$$

Označimo koordinati upogibnice $\vec{r}_0$ z $x(s)$ in $w(s)$. Potem je

$$(\vec{n} \cdot \vec{e}_n)\kappa = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{ds}^2}\,. \tag{6}$$

Privzeli smo majhne deformacije, zato iz pogoja $x'^2 + w'^2 = 1$ sledi $|\, x'\,| \neq 0$ in potemtakem moremo s zapisati kot funkcijo kordinate x, torej $s = s(x)$ oziroma $x = x(s)$. Definirajmo $\hat{w}(x) = w(s(x))$. Potem $w(s) = \hat{w}(x(s))$ in

$$w'' = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{ds}^2} = \frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathrm{w}}}{\mathrm{dx}^2}\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ds}}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{w}}}{\mathrm{dx}}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{ds}^2} = \frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathrm{w}}}{\mathrm{dx}^2}\,(1 - w'^2) - \frac{w'^2 w''}{\sqrt{1 - w'^2}}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dx}} \tag{7}$$

V geometrično linearni teoriji privzamemo, da je w' majhen in ga zato v izrazu $1 - w'^2$ zanemarimo. Potem iz (7) dobimo

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{ds}^2} = \frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathrm{w}}}{\mathrm{dx}^2}\,. \tag{8}$$

2 Ravnovesne enačbe

Nosilec v deformiranem položaju navidezno prerežemo po preseku pri izbranem s. Nosilec desno od preseka deluje na levi del nosilca s ploskovno silo na preseku. Ta ploskovni sistem sil reduciramo na točko $\vec{r}_0(s)$. Rezultanto sil označimo z $\vec{Q} = \vec{Q}(s) = H\vec{i} + V\vec{k}$, pripadajoči redukcijski moment pa z $\vec{M} = \vec{M}(s) = M\vec{j}$. Momentu M pravimo upogibni moment. Levi del nosilca deluje na desni s silo $-\vec{Q}$ in momentom $-\vec{M}$.

Nosilec prečno obremenimo z linijsko silo, ki ima dolžinsko gostoto sile $q(s)$. Del nosilca med presekoma pri s in $s + \Delta s$ je v ravnovesju, če je vsota vseh sil in momentov enaka nič. Tako dobimo ravnovesne enačbe:

$$\begin{aligned} 0 &= H(s+\Delta s) - H(s), \\ 0 &= V(s+\Delta s) - V(s) + \int_s^{s+\Delta s} q(\xi)\, d\xi, \\ 0 &= \vec{M}(s+\Delta s) - \vec{M}(s) + (\vec{r}_0(s+\Delta s) - \vec{r}_0(s)) \times \vec{Q} \\ &+ \int_s^{s+\Delta s} (\vec{r}_0(\xi) - \vec{r}_0(s)) \times q(\xi)\vec{k}\, d\xi. \end{aligned} \tag{9}$$

Enačbe delimo z Δs in poženimo Δs proti nič. Po krajšem računu potem sledi:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{ds}}, \\ 0 &= \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{ds}} + q(s), \\ 0 &= \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{ds}} - x'V + w'H \end{aligned} \tag{10}$$

Dodatno še velja $w'^2 + x'^2 = 1$. Tako imamo štiri enačbe za pet neznank, H, V, M, x in w. Prve dve lahko takoj integriramo, za določitev preostalih neznank pa potrebujemo še dodatno konstitutivno zvezo.

V okviru linearne teorije elastičnosti je osna napetost vlakna σ sorazmerna deformaciji vlakna ϵ, velja Hookov zakon $\sigma = E\epsilon$. Sorazmernostnem faktorju pravimo Youngov modul. Privzemimo, da je upogibni moment odvisen samo od porazdelitve osne napetosti. Potem je $d\vec{M} = \vec{\xi} \times \sigma\vec{e}_t\, dA$. Tu je $\vec{\xi}$ vektor od $\vec{r}_0(s)$ do točke na preseku, dA pa je ploskovni element na preseku. Tako dobimo:

$$\vec{M} = E\int_A (Y\vec{j} + Z\vec{n}) \times \sigma\vec{e}_t\, dA = E\int_A Z\epsilon\, dA\vec{j}. \tag{11}$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je ravnina XZ ravnina simetrije nosilca. Upoštevajmo (4) in (6). Potem

$$M = -E\int_A Z^2\, dA\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}} = -EI\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{ds}^2}. \tag{12}$$

Tu smo z I zapisali ploskovni moment drugega reda preseka A okrog osi $\vec{j}$. Enačbi (12) pravimo Euler-Bernoullijeva enačba. Iz ravnovesne momentne enačbe

potem dobimo sistem diferencialnih enačb za upogibnico

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{1-w'^{\,2}}, \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\,(EIw'') + \sqrt{1-w'^{\,2}}\,V - w'H. \end{aligned} \tag{13}$$

Upogibnica $\vec{r}_0(s) = x(s)\vec{i} + w(s)\vec{k}$ je potem rešitev tega sistema, ki mu predpišemo še robne pogoje. Privzemimo, da je levo krajišče nosilca vpeto. Potem je $x(0) = w(0) = 0$. Potrebujemo še dva pogoja na w. Če na krajiščih ni upogibnega momenta, sta po (12) pripadajoča robna pogoja $w''(0) = w''(l) = 0$. Tu smo z l zapisali dolžino nosilca.

Prevedimo sistem (13) v sistem z neodvisno spremenljivko x. Tu prevzemimo dovolj majhne deformacije, da je med s in x injektivna zveza. Potem je $M(s) = \hat{M}(x(s))$ in nadalje $\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{ds}} = \frac{\mathrm{d\hat{M}}}{\mathrm{dx}}\,x'$. Ker je $\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{ds}} = \frac{\mathrm{d\hat{w}}}{\mathrm{dx}}\,x'$, lahko člen x' v (10) pokrajšamo. Tako dobimo:

$$0 = \frac{\mathrm{d\hat{M}}}{\mathrm{dx}} - \hat{V} + \frac{\mathrm{d\hat{w}}}{\mathrm{dx}}\,H, \tag{14}$$

kjer je $\hat{V}(x) = V(s(x))$. Odvajajmo dobljeno po x in upoštevajmo, da je $\frac{\mathrm{d\hat{V}}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{ds}}\,\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dx}} = -q(s(x))\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dx}} =: -\hat{q}(x)$. Dobimo:

$$\frac{\mathrm{d^2\hat{M}}}{\mathrm{dx^2}} + H\frac{\mathrm{d^2\hat{w}}}{\mathrm{dx^2}} = -\hat{q}. \tag{15}$$

Sistem je nelinearen. Linearizirajmo ga za majhne pomike. Upoštevajmo konstitutivno zvezo (12) in linearizacijo (8). Tako dobimo linearno enačbo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx^2}}\left(EI\frac{\mathrm{d^2\hat{w}}}{\mathrm{dx^2}}\right) - H\frac{\mathrm{d^2\hat{w}}}{\mathrm{dx^2}} = \hat{q} \tag{16}$$

upogibnice $\vec{r}_0 = x\vec{i} + \hat{w}(x)\vec{k}$. Enačba je četrtega reda, zato potrebujemo štiri robne pogoje. Če je nosilec na krajišču, naprimer na levem, togo vpet, je $\hat{w}(0) = \hat{w}' = 0$, za vrtljivo vpeti je $\hat{w}(0) = \hat{w}'' = 0$, za prosti konec pa $\hat{w}'' = 0$ in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,(EI\hat{w}'')\,(0) + H\hat{w}'(0) = 0$. Zadnja enačba sledi iz (15) in predpostavke $\hat{V}(0) = 0$ za prosti konec. Osna sila H je vzdolž nosilca konstantna in je določena s predpisano vrednostjo na krajišču.