Oblika milnega mehurčka nad žično zanko

Predstavitev problema

- Ogledali si bomo naslednjo nalogo: žično zanko s pravokotnim tlorisom potopimo v milnico tako, da se nanjo napne milna opna (mehurček). Zanima nas, kakšno obliko zavzame mehurček.
- Izkaže se, da naloga spada med probleme minimalnih ploskev (`http://en.wikipedia.org/wiki/Minimal_surface`).
- Navdušenje nad minimalnimi ploskvami sta denimo pokazala arhitekta Muenchenskega olimpijskega stadiona.

Slika: Olympiastadion v Muenchnu.

- Če je milnica dovolj lahka in ni tlačnih razlik, je problem ekvivalenten

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in D = [-a,a] \times [-b,b] \\ u(x,y) &= f(x,y), \quad (x,y) \in \partial D. \end{aligned} \tag{1}$$

- Funkcija $u(x,y)$ je odmik milnega mehurčka v točki (x,y) in f "deformacija" ravnega žičnega okvira v vertikalni smeri.
- Zaradi enostavnosti bomo predpostavili $a = b$.

- Problem je zelo podoben problemu upogiba opne, le da nimamo krožne simetrije.
- Spet ga znamo analitično rešiti le za zelo posebne primere ("fizikalno" razmislite, kakšna je rešitev, če cel okvir leži v eni ravnini).
- V splošnem se moramo reževanja lotiti numerično.
- Uporabimo podobne ideje kot pri upogibu opne.

Izpeljava sistema linearnih enačb

- Razdelimo kvadrat $D = [-a, a] \times [-a, a]$ na $n+1$ podintervalov v vsaki koordinatni smeri

$$\begin{aligned} -a &=: x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} := b, \\ -a &=: y_0 < y_1 < \cdots < y_n < y_{n+1} := b, \end{aligned}$$

  kjer je $h := \Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.
- Naj bo $u_{i,j}$ numerični približek za $u(x_j, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, $j = 0, 1, \ldots, n+1$.
- Zaradi robnih pogojev je

$$\begin{aligned} u_{0,j} &= f(x_j, -a), & j &= 0, 1, \ldots, n+1, \\ u_{n+1,j} &= f(x_j, a) & j &= 0, 1, \ldots, n+1, \\ u_{i,0} &= f(-a, y_i), & i &= 0, 1, \ldots, n+1, \\ u_{i,n+1} &= f(a, y_i), & i &= 0, 1, \ldots, n+1. \end{aligned}$$

- Vrednosti $u_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, so neznane (n^2 neznank).
- Za neznanke bomo izpeljali n^2 enačb.
- Diskretizirajmo Laplaceov operator Δ:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, y_i) &= \frac{u(x_{j-1}, y_i) - 2u(x_j, y_i) + u(x_{j+1}, y_i)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\
&\approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_j, y_i) &= \frac{u(x_j, y_{i-1}) - 2u(x_j, y_i) + u(x_j, y_{i+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\
&\approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}.
\end{aligned}
$$

- Aproksimacije vstavimo v enačbo (1) in po preurejanju dobimo

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j} = 0, \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

- Dobili smo sistem n^2 linearnih enačb za neznanke $u_{i,j}$.
- Če želimo sistem zapisati v matrični obliki, moramo neznanke $u_{i,j}$ oštevilčiti.
- Izberemo številčenje: $u_{1,1} = u_1, u_{1,2} = u_2, \ldots, u_{1,n} = u_n$, $u_{2,1} = u_{n+1}, \ldots, u_{n,n} = u_{n^2}$, oziroma

$$u_{n(i-1)+j} = u_{i,j}.$$

- Neznanke zberemo v vektor $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_{n^2}]^T$.

- Pridemo do matričnega zapisa

$$A\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} L & I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ I & L & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & L & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & I & L & I \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I & L \end{bmatrix}.$$

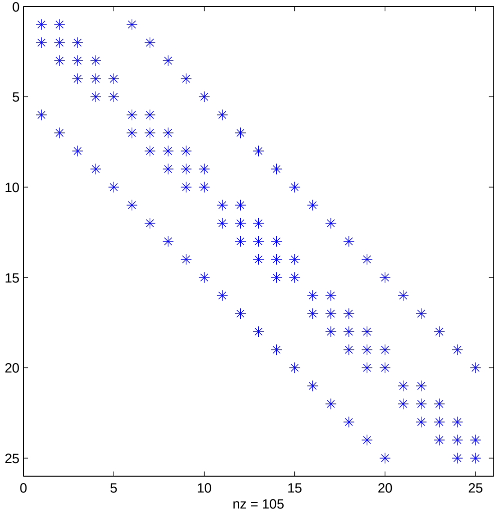
- Pri tem je I identiteta dimenzije n in

$$L = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

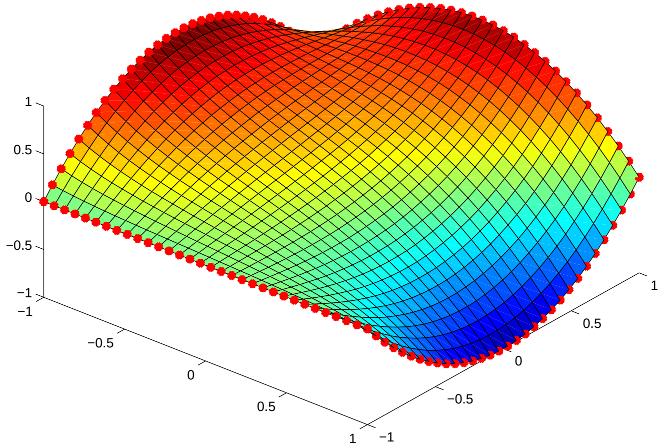
- Elementi desne strani $\boldsymbol{b}$ so bodisi nič, bodisi povezani z robnimi vrednostmi.

- Natančneje

$$\begin{aligned}
b_1 &= -f(-a, y_1) - f(x_1, -a), \\
b_n &= -f(a, y_1) - f(x_n, -a), \\
b_{n^2-n+1} &= -f(-a, y_n) - f(x_1, a), \\
b_{n^2} &= -f(a, y_n) - f(x_n, a), \\
b_i &= -f(x_i, -a), \quad i = 2, 3, \ldots n-1, \\
b_{n^2-n+i} &= -f(x_i, a), \quad i = 2, 3, \ldots n-1, \\
b_{(i-1)\,n+1} &= -f(-a, y_i), \quad i = 2, 3, \ldots n-1, \\
b_{i\,n} &= -f(a, y_i), \quad i = 2, 3, \ldots n-1, \\
b_i &= 0, \quad \text{sicer.}
\end{aligned}$$



Slika: Struktura Laplaceove matrike za $n = 5$. Zvezdice označujejo pozicije neničelnih elementov (takih je 105).



Slika: Rešitev problema na kvadratu $[-1,1] \times [-1,1]$ z mrežo 32×32. Robne vrednosti so $f(-1,y) = 1 - y^2$, $f(x,1) = 1 - x^2$, $f(1,y) = y^2 - 1$ in $f(x,-1) = 0$.

- Reševanje sistema preko matrike je seveda **zelo potratno**: za $n + 2$ delilnih točk na mreži zahteva
  - $\mathcal{O}(n^4)$ prostora,
  - $\mathcal{O}(n^6)$ časa.
- Praktično je torej tak pristop neupraben.
- Zatečemo se k iteracijskim metodam.
- Podrobneje si bomo ogledali Jacobijevo iteracijo, pri ostalih pa le namignili, kako jih uporabimo.

Jacobijeva iteracija

- Rešitev sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ z Jacobijevo iteracijo dobimo kot zaporedje približkov

$$D\,\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} - (S+Z)\boldsymbol{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

  kjer je D diagonala matrike A, $S+Z$ pa preostanek matrike A (A brez diagonale).
- Po komponentah je torej

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- O konvergenci Jacobijeve iteracije odloča iteracijska matrika $M_J := -D^{-1}(L + U)$.
- Velja namreč: Jacobijeva iteracija konvergira za vsak začetni približek, če je $\rho(M_J) < 1$.

Lema

Ireducibilna šibko diagonalno dominantna matrika A je nesingularna.

Opomba

Kvadratna matrika A je ireducibilna, če se jo s permutacijami stolpcev in vrstic ne da preoblikovati v bločno zgornjo trikotno matriko in je šibko diagonalno dominantna, če je

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}\right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ter je neenakost stroga za vsaj en $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Po prejšnji lemi je matrika ▸ A našega sistema nesingularna.
- Za Jacobijevo iteracijo pa konvergenca za sistem s to matriko sledi iz naslednjega izreka:

Izrek

Naj bo matrika A sistema linearnih enačb $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ strogo diagonalno dominantna ali ireducibilna in šibko diagonalno dominantna. Potem Jacobijeva iteracija konvergira za vsak začetni približek.

Gauss-Seidlova iteracija

- Jacobijevo iteracijo lahko takoj "izboljšamo"

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- V matričnem zapisu je torej

$$(S + D)\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} - Z\boldsymbol{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

in je iteracijska matrika enaka $M_{GS} = -(S + D)^{-1} Z$.

Izrek

Naj bo matrika A sistema linearnih enačb $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ strogo diagonalno dominantna ali ireducibilna in šibko diagonalno dominantna. Potem Gauss-Seidlova iteracija konvergira za vsak začetni približek.

Izrek

Če je A hermitska pozitivno definitna matrika, je spektralni radij Gauss-Seidlove iteracijske matrike manjši od 1.

SOR metoda

- Gauss-Seidlovo metodo malce modificiramo

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\boldsymbol{x}_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right),$$

  kjer je $\omega \in \mathbb{R}$.
- Metodi rečemo SOR (Successive Over-Relaxation) metoda, njena iteracijska matrika je

$$M_{SOR} = (\omega S + D)^{-1}((1-\omega)D - \omega Z).$$

Izrek

Če $\omega \notin (0, 2)$, potem SOR iteracija ne konvergira.

Izrek

Če je A hermitska pozitivno definitna matrika, je spektralni radij SOR iteracijske matrike manjši od 1 *natanko tedaj, ko je* $0 < \omega < 2$.

- SOR metode so zelo raziskane in znani so rezultati optimalnih ω za različne razrede matrik.
- Eden od takih razredov je tudi tip matrik z "lastnostjo A" (matriko se da s simetričnimi permutacijami preoblikovati v bloktridiagonalno obliko, kjer so diagonalni bloki diagonalne matrike).
- Matrika našega problema ima lastnost "A".

Izrek

Če ima matrika sistema enačb lastnost "A", potem je optimalni parameter pri SOR iteraciji enak

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\mu^2}},$$

kjer je $\mu < 1$ *spektralni radij matrike* M_J. *Velja tudi* $\rho(M_{GS}) = \mu^2$.

Posledica

Optimalna vrednost parametra za omenjene matrike je vedno med 1 *in* 2. *Gauss-Seidlova iteracija konvergira dvakrat hitreje kot Jacobijeva.*

Reševanje sistema direktno na mreži

- Ker je za naš problem matrika posebne oblike, lahko iterativno reševanje izvedemo kar na mreži vrednosti u_{ij}.
- Korak Jacobijeve iteracije tedaj pomeni računanje povprečja notranjih elementov mreže na podlagi štirih sosedov. Rob pustimo seveda nedotaknjen.
- Korak Gauss-Seidlove je podoben koraku Jacobijeve, le da pri izračunu povprečja upoštevamo že iračunane elemente.
- SOR metoda pa je le rahla modifikacija Gauss-Seidlove.
- Prostorska zahtevnost je namesto $\mathcal{O}(n^4)$ sedaj $\mathcal{O}(n^2)$, časovna pa namesto $\mathcal{O}(n^6)$ spet $\mathcal{O}(n^2)$ (če je iteracij bistveno manj kot n).