Paličje

George Mejak

Kazalo

1 Togo paličje

V tem razdelku obravnavamo togo paličje ali na kratko kar paličje.

Definicija 1. *Paličje je togi sistem sestavljen iz ravnih togih palic. Spojem pravimo vozlišča. Notranje sile so sile palic, ki so usmerjene v smeri palic. Zunanje sile na paličje imajo prijemališča v vozliščih palic. Paličje je v statičnem ravnovesju, če je vsota vseh sil v vseh vozliščih enaka nič.*

Paličje $\mathcal{P}$ opišemo z množico vozlišč $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ in povezav med vozlišči $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Vozlišči $\boldsymbol{v}_i \in \mathcal{P}$ in $\boldsymbol{v}_j \in \mathcal{P}$ sta povezani s palico, če je $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \in \mathcal{E}$ za $i > j$. Paličje lahko tako reprezentiramo z neusmerjenim grafom danim z množico vozlišč $\mathcal{P}$ in povezavami $\mathcal{E}$. Paličje je ravninsko, če ležijo vsa njena vozlišča v eni ravnini.

Enostavno paličje definiramo induktivno.

Definicija 2. *Označimo s $\mathcal{P}_n$ enostavno paličje z n vozlišči. Velja:*

- *$\mathcal{P}_3$ je trikotnik;*
- *Paličje $\mathcal{P}_{n+1} = (\mathcal{V}_{n+1}, \mathcal{E}_{n+1})$ je enostavno prostorsko paličje, če obstaja $\boldsymbol{v}_{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$ in nekoplanarne povezave $(\boldsymbol{v}_{n+1}, \boldsymbol{v}_i)$, $(\boldsymbol{v}_{n+1}, \boldsymbol{v}_j)$ in $(\boldsymbol{v}_{n+1}, \boldsymbol{v}_k)$ tako, da je $\mathcal{P}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$, kjer je $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n+1} \setminus \{\boldsymbol{v}_{n+1}\}$ in*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n+1} \setminus \{(\boldsymbol{v}_{n+1}, \boldsymbol{v}_i), (\boldsymbol{v}_{n+1}, \boldsymbol{v}_j), (\boldsymbol{v}_{n+1}, \boldsymbol{v}_k)\}$$

enostavno paličje.

Podobno definiramo ravninsko paličje, kjer začnemo s palico in na vsakem indukcijskem koraku odvzemamo vozlišče z dvema nekolinearnima povezavama.

Za enostavno paličje $\mathcal{P}_n$ očitno velja formula $2n = p + 3$(ravninsko) oziroma $3n = p + 6$(prostorsko). Tu je p število palic.

Paličje je po definiciji togi sistem. Zato je pri danih obremenitvah v statičnem ravnovesju, če so obremenitve uravnovešene s silami podpor. Za ravninsko paličje moramo tako določiti 3 komponente sil podpor, za prostorsko pa 6. Ker je paličje togi sistem, so pravilno izbrane podpore statično določljive iz enačb ravnovesja togega sistema. V nadaljevanju bomo privzeli, da so sile podpor vedno statično določljive.

Skupno število neznank, neznane sile palic in neznane sile podpor mora biti enako številu ravnovesnih enačb, če želimo določiti neznane sile. Potemtakem mora za vsako paličje veljati

$$2n = p + 3 \quad \text{ozirma} \quad 3n = p + 6. \tag{1}$$

Vprašanje je, kdaj je ta pogoj zadosten oziroma kdaj je sistem ravnovesnih enačb enolično rešljiv. Če je, pravimo, da je paličje *statično določeno.*

Trditev 1. *Enostavno paličje je statično določeno.*

Dokaz. Res, naj bo $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{n+1}$ enostavno paličje dobljeno iz paličja $\mathcal{P}_n$ in naj bo $\boldsymbol{v}_{n+1}$ dodano vozlišče. Po definiciji enostavnega paličja potem sledi, da moremo enolično določiti vse sile, dve za ravninsko in tri za prostorsko, ki vežejo $\boldsymbol{v}_{n+1}$ s $\mathcal{P}_n$. Za paličje $\mathcal{P}_n$ so te sile palic zunanje obremenitve. Torej, če je $\mathcal{P}_n$ statično določeno, je tudi $\mathcal{P}_{n+1}$ statično in potemtakem je po indukciji enostavno paličje statično določeno. □

Poglejmo sedaj, kako je s statično določenostjo neenostavnega paličja. Ker je paličje togo, je $|\,\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j\,| = l_{ij}$ konstanta za poljubne pomike paličja. Označimo z $\delta\boldsymbol{v}_i$ variacijo vozlišča $\boldsymbol{v}_i$. Potem je $(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot (\delta\boldsymbol{v}_i - \delta\boldsymbol{v}_j) = 0$ za vsak par $i > j$. Variacije $\delta\boldsymbol{v}_i$ so potemtakem rešitev homogenega sistema p enačb

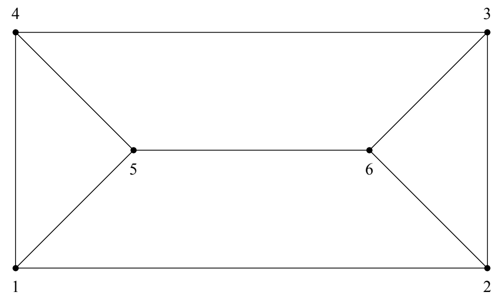
$$(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot (\delta\boldsymbol{v}_i - \delta\boldsymbol{v}_j) = 0, \qquad i > j \tag{2}$$

za nd neznank. Očitno ima sistem $3(d-1)$ netrivialne rešitve, $\delta\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, kjer sta $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ poljubna. Z drugimi besedami, infinitezimalni togi pomik je rešitev (2). Infinitezimalni togi pomik je edina rešitev, če ima sistem (2) maksimalni rang, to je p.

Definicija 3. *Paličje je infinitezimalno togo, če ima sistem (2) maksimalni rang.*

Velja opozoriti, ni vsako paličje infinitezimalno togo. Primer je dan na sliki 1, kar potrdi direktni račun.

Trditev 2. *Infinitezimalno togo paličje je statično določeno.*



Slika 1: Paličje, ki ni infinitezimalno togo.

Dokaz. Paličje je togo, zato lahko sile podpor vedno enolično določimo in jih zato v dokazu trditve smatramo kot predpisane sile obremenitev. Označimo z $\boldsymbol{F}_{ji}$ silo palice vozlišča $\boldsymbol{v}_j$ na vozlišče $\boldsymbol{v}_i$ in naj bo I_i indeksna množica sosedov vozlišča $\boldsymbol{v}_i$. Sistem ravnovesnih enačb je

$$\sum_{j \in I_i} \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \ldots, n$$

oziroma

$$\sum_{j \in I_i} F_{ji} \frac{\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i}{|\,\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i\,|} + \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Označimo $F_{ji} = \alpha_{ji}\,|\,\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i\,|$. Po definiciji je $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Če sistem (3) ni enolično rešljiv, ima sistem

$$\sum_{j \in I_i} \alpha_{ji}(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

za p neznank α_{ij} netrivialno rešitev. Potemtakem nima maksimalnega ranga, to pa je v protislovju s predpostavko, saj imata sistema (4) in (2) enak rang. $\square$

Neznanke sistema (3) so sile palic $F_{ij} = F_{ji}$. Če je $F_{ij} > 0$ je sila palice natezna, za $F_{ij} < 0$ pa tlačna. Pri modelirenju s paličjem moramo paziti na tlačne sile, saj prevelike tlačne sile povzročijo izbočitev palice in s tem možnost porušitve. Seveda moramo model paličja nadgraditi, če želimo dopustiti pomike vozlišč. Prvi korak je model elastičnega paličja.

2 Elastično paličje

Pri elastičnem paličju dopustimo osne deformacije palic.

Definicija 4. *Elastično paličje je sistem sestavljen iz ravnih elastičnih palic, ki se lahko deformirajo samo po dolžini. Konstitutivni zakon, ki povezuje deformacije palic in sile palic je elastičen. Zunanje sile na paličje imajo prijemališča* *v vozliščih palic. Paličje je v statičnem ravnovesju, če je vsota vseh sil v vseh vozliščih enaka nič.*

Naj bo $\mathcal{P}$ statično določeno togo paličje. Za dane obremenitve in podpore izračunamo sile palic F_{ij}. Za določitev osnega pomika predpostavimo veljavnost Hookovega zakona

$$\frac{\Delta l_{ij}}{l_{ij}} = \frac{1}{E_{ij}S_{ij}} F_{ij}. \tag{5}$$

Tu je $l_{ij} = |\,\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j\,|$ nedeformirana dolžina palice, Δl_{ij} njena deformirana dolžina, S_{ij} površina preseka palice in E_{ij} Youngov modul, ki povezuje mero osne deformacije $\epsilon = \epsilon_{ij} = \Delta l_{ij}/l_{ij}$ z napetosjo palice $\sigma = \sigma_{ij} = F_{ij}/S_{ij}$. Pri osni deformaciji se vozlišči $\boldsymbol{v}_i$ in $\boldsymbol{v}_j$ palice pomakneta v novo lego $\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{p}_i$ oziroma v $\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{p}_j$. Vektor $\boldsymbol{p}_i$ je tako pomik vozlišča $\boldsymbol{v}_i$.

Pomike določimo iz enačb

$$|\,(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{p}_i) - (\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{p}_j)\,| = l_{ij} + \Delta l_{ij}. \tag{6}$$

Predpostavimo, da so pomiki majhni in sistem (6) lineariziramo v

$$(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot (\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j) = l_{ij} \Delta l_{ij}. \tag{7}$$

V podporah so pomiki predpisani, v fiksni podpori so enaki nič, v drsni pa so enaki nič v nedrsnih smereh. Zato ima sistem (7) toliko neznank kolikor je enačb. Za infinitezimalno togo paličje, je ta sistem enolično rešljiv. Če namesto (7) rešujemo (6), moramo rešiti sistem nelinearnih enačb. Pri reševanju z Newtonovo metodo na vsakem koraku interacije dejansko rešimo sistem (7).

Sile togega paličja z novimi vozlišči praviloma niso enake prvotnim silam. Tu predpostavimo, da so obremenitve v vozliščih enake prvotnim, tako imenovana mrtva obremenitev. Če pomiki niso majhni, je potrebno sile izračunati na novo. Tako dobimo iteracijo, izračun sil, izračun pomikov, ki jo prekinemo, ko so pomiki dovolj majhni. V primeru, da naredimo samo en korak iteraciji govorimo o infinitezimalnem modelu.

Iteracijo sile, pomiki združimo z optimizacijo ustreznega energijskega funkcionala v enotno iteracijo. V ta namen priredimo paličju elastično energijo

$$U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in I_i} \frac{E_{ij}S_{ij}}{2l_{ij}} \left(|\,(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{p}_i) - (\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{p}_j)\,| - l_{ij}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{p}_i. \tag{8}$$

Potem

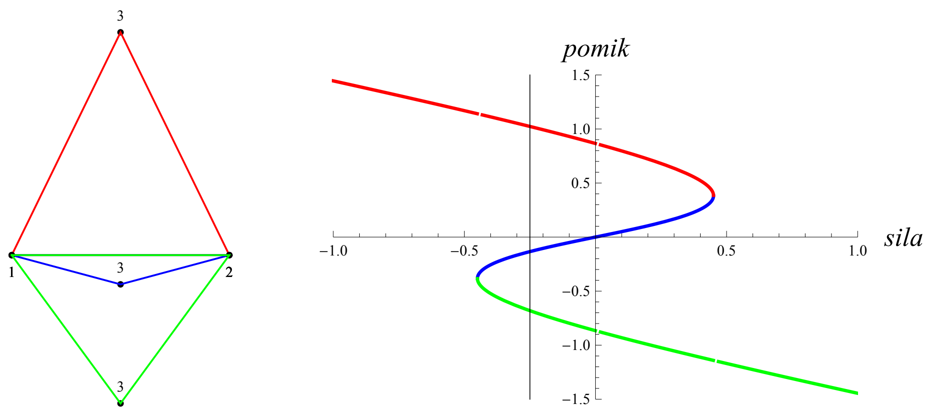
$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{p}_i} = \sum_{j \in I_i} \frac{E_{ij}S_{ij}}{l_{ij}} \left(|\,(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{p}_i) - (\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{p}_j)\,| - l_{ij}\right) \frac{(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{p}_i) - (\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{p}_j)}{|\,(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{p}_i) - (\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{p}_j)\,|} - \boldsymbol{F}_i. \tag{9}$$

Upoštevajmo sedaj Hookov zakon (5). Potem

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{p}_i} = -\sum_{j \in I_i} F_{ij} \frac{(\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{p}_j) - (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{p}_i)}{|\,(\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{p}_j) - (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{p}_i)\,|} - \boldsymbol{F}_i$$

in potemtakem je stacionarna točka energijskega funkcionala natanko rešitev ravnovesnih enačb, primerjaj s (3), za paličje z vozlišči $\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{p}_i$. Funkcional U optimiziramo na množici dopustnih pomikov, ki jo določajo podpore. Z razliko od togega paličja lahko sedaj predpišemo podpore brez omejitve statične določljivosti paličja.

Rešitev ravnovesnih enačb je natanko stacionarna točka energijskega funkcionala, ki je lahko minimum, maksimum ali prevoj. Da je rešitev lahko več ponazarja enostavni primer na sliki 2, von Misesovo paličje. Enakostranični paličje na sliki ima pri dani obremenitvi en ali tri ravnovesne položaje. V zgornjem(rdečem) in spodnjem(zelenem) položaju ima energija minimum, v vmesnem(modrem) pa ima maksimum. Položaj v katerem ima energija minimum je stabilen in nestabilen v položaju, kjer ime energija maksimum. Minimum je globalen na rdeči krivulji za negativno silo in na zeleni za pozitivno silo. Kateri dopustni položaj zavzame paličje je izven dosega modela elastičnega paličja. Pri računanju praviloma iščemo ravnovesni položaj, ki je najbližji neobremenjenemu referenčnemu položaju.



Slika 2: Levo; tri možna ravnovesja enakostraničnega elastičnega paličja s fiksnima podporama $\boldsymbol{v}_1$ in $\boldsymbol{v}_2$ obremenjenega navpično navzdol. Desno; brzdimenzijski pomiki $\boldsymbol{v}_3$ v odvisnosti od obremenitve. Premica $sila = -1/4$ seka pomike v treh točkah, ki ustrezajo konfiguracijam na levi.