NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

3. izpit

26.8.2009

1. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 + c\,x_2 + x_3 &= 1 \\ c\,x_1 + x_2 + c\,x_3 &= 2 \\ -c^2\,x_1 + c\,x_2 + x_3 &= -1, \end{aligned}$$

   kjer je $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$.

   (a) Za katere vrednosti parametra c konvergira Gauss-Seidelova iteracija?

   (b) Ali Jacobijeva iteracija konvergira za $c = 2$? Odgovor utemeljite!

2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   Izračunajte determinanto matrike A preko QR razcepa z Givensovimi rotacijami.

3. Naj bo matrika $B(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ definirana z $B(\lambda) := (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T$ za $\lambda > 0$, in naj bo rang(A) = r. Dokažite, da velja

$$||B(\lambda) - A^+||_2 = \frac{\lambda}{\sigma_r(A)\,[\sigma_r(A)^2 + \lambda]}.$$

   Pazite: matrika A ni nujno polnega ranga, zato A^+ ni kar $(A^T A)^{-1} A^T$. (Iz rezultata sledi, da $B(\lambda)$ konvergira k A^+, ko gre λ proti 0.)

4. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. **Polje vrednosti** je definirano z

$$W(A) = \{x^H A x, x \in \mathbb{C}^n, x^H x = 1\}.$$

   To je množica Rayleighovih kvocientov za $||x||_2 = 1$.

   Dokažite, da je polje vrednosti matrike $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, ki ima eno samo lastno vrednost, konveksna množica.

   (a) Pokažite, da zadošča poiskati polje vrednosti matrike

$$\begin{bmatrix} r & b \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

   Namig: Schurova forma.

   (b) Pokažite, da velja W(B + r I) = W(B) + r in W(b C) = b W(C). Utemeljite, da zadošča poiskati konveksno ogrinjačo matrike

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } b = 1.$$

   (c) S pomočjo zgornje točke dokažite konveksnost.

   Nasvet: upoštevajte, da se vsi vektorji norme ena zapišejo kot $\begin{bmatrix} e^{i\alpha}\cos\phi & e^{i\beta}\sin\phi \end{bmatrix}^T$ in da velja $b = |b|e^{i\gamma}$.

   Točk ni potrebno reševati po vrsti.