NLA

2. izpit

29. 8. 2011

1. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ 2 & 3 & 4 & & \\ & 4 & 5 & 6 & \\ & & 6 & 7 & 8 \\ & & & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$
S pomočjo 3-členske rekurzivne formule in Sturmovega zaporedja izračunaj število lastnih vrednosti matrike A na intervalu $[0, 10]$.

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ njene lastne vrednosti. Dan je tak par (μ, z), da je $\|z\| = 1$ in $\|Az - \mu z\| \le \epsilon$. Naj velja $|\mu - \lambda_i| \ge d > 0$ za $i = 2, \ldots, n$. Pokaži, da ima potem A tak enotski lastni vektor x_1 za lastno vrednost λ_1, da velja
$$\|z - x_1\|_2 \le \sqrt{2}\sqrt{(1 - \sqrt{1-\gamma}))},$$
kjer je $\gamma = \epsilon/d$.

3. Dana je matrika A reda $m \times n$. Matriko B dobimo tako, da matriko A zarotiramo za 90° v smeri urinega kazalca. Na 3×2 matriki to izgleda takole
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \end{bmatrix}.$$
Ali imata A in B enake singularne vredosti? Dokaži ali poišči protiprimer.

4. Pri QZ algoritmu se srečamo z naslednjim problemom. Dani sta matriki A, B oblike
$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix},$$
iščemo pa taki ortogonalni matriki Q in Z, da bo matrika $A_1 = QAZ$ zgornja Hessenbergova, matrika $B_1 = QBZ$ pa zgornja trikotna. Iz Givensovih rotacij sestavi matriki Q in Z in po vsakem množenju obeh matrik z Givensovo matriko (z leve ali desne) skiciraj, kateri elementi v obeh matrikah so neničelni.