NLA

Zimski izpit

20. 2. 2012

1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 15 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 20 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 40 \end{bmatrix}$$

   (a) Čim bolj natančno določite območja, v katerih se nahajajo lastne vrednosti matrike A. Upoštevajte, da imata matriki A in A^T enake lastne vrednosti. Območja tudi narišite.

   (b) Ocene lahko izboljšamo, če gledamo podobno matriko QAQ^{-1}. Poiščite optimalno matriko oblike $Q = \mathrm{diag}(1, 1, 1, k)$, pri kateri dobite najboljše ocene za največjo lastno vrednost.

2. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Definiramo še matriki $A_1 = AD_1$ in $A_2 = D_2A$. Izrazi njune singularne vrednosti in vektorje s singularnimi vrednostmi in vektorji matrike A v primeru, ko sta D_1 in D_2 diagonalni matriki, kjer imajo vsi elementi absolutno vrednost 1. Ali znaš povedati kaj tudi v primeru, če sta D_1 in D_2 unitarni ali diagonalni matriki?

3. Matrika $A \in \mathbb{C}^{3n\times 3n}$ ima bločno obliko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & X & Y \\ 0 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   kjer so matrike $X, Y, Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Poišči tako unitarno matriko Q, da bo matrika QAQ^H oblike

$$QAQ^H = \begin{bmatrix} 0 & X' & Y' \\ 0 & 0 & Z' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   pri čemer bosta X' in Z' zgornje trikotni matriki.

4. Ko se pri QZ algoritmu na diagonali matrike B pojavi 0, lahko naredimo deflacijo in dimenzijo problema zmanjšamo za ena. V primeru matrik A in B oblike

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

   iz Givensovih rotacij sestavi ortogonalni matriki Q in Z, da bosta matriki QAZ in QBZ oblike

$$QAZ = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad QBZ = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$