NLA

2. izpit

11. 7. 2012

1. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Uporabi Sturmovo zaporedje in določi število lastnih vrednosti na naslednjih intervalih:
$$(-\infty, 1], (1, 2], (2, 3], (3, \infty).$$

2. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^H & I \end{bmatrix},$$
kjer za matriko $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ velja $\|B\|_2 < 1$. Pokaži, da velja
$$\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{1 + \|B\|_2}{1 - \|B\|_2}.$$

3. Dan je polinom
$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$
Dokaži, da za njegove ničle z_j, $j = 1, \ldots, n$, veljata naslednji neenakosti
   (a) $|z_j| \leq \max(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|)$,
   (b) $|z_j| \leq \max(|a_0|, 1 + |a_1|, \ldots, 1 + |a_n|)$.

   V primeru, da so vsi koeficienti a_i različni od 0 in definiramo $a_n = 1$, pa veljata tudi
   (c) $|z_j| \leq \max(|\frac{a_0}{a_1}|, 2|\frac{a_1}{a_2}|, \ldots, 2|\frac{a_{n-1}}{a_n}|)$,
   (d) $|z_j| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\frac{a_i}{a_{i+1}}|$.

   Nasvet: Pomagaj si s pridruženo matriko polinoma in z Gerschgorinovima izrekoma.

4. Pri QZ algoritmu se srečamo z naslednjim problemom. Dani sta matriki A, B oblike
$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},$$
iščemo pa taki ortogonalni matriki Q in Z, da bo matrika $A_1 = QAZ$ zgornja Hessenbergova, matrika $B_1 = QBZ$ pa zgornja trikotna. Iz Givensovih rotacij sestavi matriki Q in Z in po vsakem množenju obeh matrik z Givensovo matriko (z leve ali desne) skiciraj, kateri elementi v obeh matrikah so neničelni.

5. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Pokaži, da sta matriki

$$\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

podobni. Nato pokaži, da so neničelne lastne vrednosti matrik AB in BA enake.