NLA

1. izpit

21. 6. 2011

1. Podana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poišči lastne vrednosti in vektorje matrike A. Kakšno zaporedje matrik dobite če za matriko A uporabite QR iteracijo brez premikov? Ali metoda konvergira in dobimo lastne vrednosti? Kaj pa je s konvergenco v primeru uporabe QR iteracije za matriko $A + I$?

2. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Uporabi Sturmovo zaporedje in določi število lastnih vrednosti na naslednjih intervalih:
$$(-\infty, -2], (-2, 0], (0, 2], (2, \infty).$$

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, ki preslika enotsko sfero v elipsoid z naslednjimi polosmi:
$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T / \sqrt{2} \mapsto Ax = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{1}$$
$$x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T / \sqrt{2} \mapsto Ax = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{2}$$
$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \mapsto Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \tag{3}$$
Poišči singularni razcep matrike A in izračunaj pogojenostno število matrike A ter poišči najboljšo aproksimacijo ranga 1 A_1, ki minimizira $||A - A_1||_2$.

4. Naj no $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrika. Potem definiramo nestandardno pogojenostno število kot
$$K(A) = \frac{\frac{1}{n}\mathrm{sled}(A)}{\det(A)^{\frac{1}{n}}}.$$
Pokaži, da velja
$$1 \le K(A) \le \frac{\lambda_n}{\lambda_1},$$
kjer so $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A.

5. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \sin(\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon) & 1 \end{bmatrix}.$$
Poiščite ocene za lastne vrednosti s pomočjo Gerschgorinovega izreka. Dokaži, da za najmanjšo lastno vrednost velja še močnejša ocena. Uporabi Gerschgorinov izrek za podobno matriko DAD^{-1}, kjer je D primerna diagonalna matrika, ki ima samo en diagonalni element različen od 1.

6. Naj bo $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nenegativna ($t_{ij} \geq 0$), in matrika $A = T - I$ nilpotentna. Dokaži, da je tudi matrika A nenegativna.

7. Neničelni projektor se da zapisati v obliki

$$P = UU^T,$$

kjer je U $m \times n$, $m \geq n$ matrika z ortogonalnimi stolpci. Matrika P je očitno simetrična in idempotetna

$$P = P^T, \quad P = P^2.$$

Pokaži obraz gornje trditve, torej: vsaka simetrična idempotentna matrika je projektor. (Pomagaj si z SVD razcepom.)

8. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Naj bo $x \in \mathbb{R}$., $\lambda \in \mathbb{R}$, ter $\epsilon \geq 0$. Pokaži, da če velja $||Ax - \lambda x||_2 < \epsilon$, potem je $\min_{1\leq j\leq n} |\lambda_j - \lambda| < \epsilon$.

9. Dana je matrika A reda $m \times n$. Matriko B dobimo tako, da matriko A zarotiramo za $90°$ v smeri urinega kazalca. Na 3×2 matriki to izgleda takole

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \end{bmatrix}.$$

Ali imata A in B enake singularne vredosti? Dokaži ali poišči protiprimer.

10. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in oznaka $x > 0$ za $x \in \mathbb{R}^n$ pomeni, da so vse komponente vektorja x strogo pozitivne. Definirajmo minimalno Gerschgorinovo množico

$$G(A) = \cap_{x>0} G_x(A), \quad G_x(A) = \cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{x_i} \sum_{j\neq i} |a_{ij}| x_j \right\}.$$

Dokažite: Naj bo $\Gamma(A)$ množica lastnih vrednosti matrike A. Potem velja $\Gamma(A) \subset G(A)$. *Nasvet: Pomagajte si s primerno izbrano matriko, ki je podobna matriki A, in Geršgorinovim izrekom.*