NLA

1. izpit

21. 6. 2011

1. Določi območje, v katerem se nahajajo lastne v rednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -1 & 2 & 15 \end{bmatrix}.$$

   a) Uporabi Gerschgorinov izrek. Upoštevaj tudi, da imata matriki A in A^T iste lastne vrednosti.

   b) Podobna matrika QAQ^{-1} ima iste lastne vrednosti kot matrika A. Ponavadi si za Q izberemo kar diagonalno matriko. Poišči optimalno matriko

$$Q = \begin{bmatrix} k & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

   pri kateri dobiš najboljše oceno za najmanjšo lastno vrednost. Kaj lahko poveš o ostalih lastnih vrednostih?

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Naj bo $x \in \mathbb{R}^n$, kjer je $||x||_2 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ter $\epsilon \geq 0$. Pokaži, da če velja $||Ax - \lambda x||_2 < \epsilon$, potem je $\min_{1\leq j\leq n} |\lambda_j - \lambda| < \epsilon$.

3. Matrika A dimenzije $m\times n$ ima obliko $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, kjer je A_1 nesingularna matrika dimenzije $n \times n$ in A_2 matrika dimenzije $(m - n) \times n$. Pokaži, da velja

$$\|A^+\|_2 \leq \|A_1^{-1}\|_2.$$

   Nasvet: Upoštevaj zvezo med spektralno normo in singularnimi vrednostmi.

4. Dani sta realni $n \times n$ kvadratni matriki A in B. Denimo, da imamo na začetku sisteme $(A + \sigma_i B)x_i = b_i$ za $i = 1, \ldots, k$, kjer je $k \gg n$. Poišči ekonomičen algoritem za reševanje teh sistemov, ki bo imel skupno zahtevnost $O(kn^2)$. Za kakšen faktor se algoritem pospeši, če je vektor b na desni strani fiksen.