

NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

4. izpit

21.9.2009

1. Za poljubna $a > 0$ in $x_0 > 0$ je podan iteracijski predpis

$$x_{r+1} = \frac{1}{2} \left(x_r + \frac{a}{x_r} \right).$$

Izpeljite oceni

$$(a) \quad x_{r+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_r - \sqrt{a})^2}{2x_r},$$

$$(b) \quad x_{r+1} - \sqrt{a} \leq \frac{2(x_r - x_{r+1})^2}{x_r}$$

in pokažite, da zaporedje x_r konvergira proti \sqrt{a} . Kolikšen je red konvergence?

2. Izračunajte LU razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

z delnim pivotiranjem. S pomočjo LU razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je $b = [4 \quad 7 \quad -5]^T$.

3. Naj bo dana nesingularna matrika A reda n skupaj z inverzno matriko A^{-1} . Zapiši algoritem za izračun inverzne matrike B^{-1} razširjene matrike

$$B = \begin{bmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{bmatrix},$$

kjer sta $u, v \in \mathbb{C}^n$ in $\alpha \in \mathbb{C}$. Koliko operacij je potrebnih za izračun?

4. Podana je kompleksna matrika A dimenzije $m \times n$. Matrika je oblike

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

kjer je A_1 obrnljiva matrika dimenzije $n \times n$ in A_2 matrika dimenzije $(m-n) \times n$. Dokažite, da velja $\|A^+\|_2 \leq \|A_1^{-1}\|_2$.

Nasvet: psevdo inverz matrike A polnega stolpčnega ranga je kar $(A^H A)^{-1} A^H$.