NLA

3. izpit

9. 9. 2011

1. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Uporabi Sturmovo zaporedje in določi število lastnih vrednosti na naslednjih intervalih:
$$(-\infty, -2], (-2, 0], (0, 2], (2, \infty).$$

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika oblike $A = [A_1\ A_2]$, kjer je $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ in $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$. Naj bodo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ singularne vrednosti matrike A in $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau_m \geq 0$ singularne vrednosti matrike A_1. Dokaži, da velja:
$$\sigma_j \geq \tau_j \geq \sigma_{j+n-m}.$$
Nasvet: Najprej si poglej primer, ko je $m = n - 1$.

3. Ko se pri QZ algoritmu na diagonali matrike B pojavi 0, lahko naredimo deflacijo in dimenzijo problema zmanjšamo za ena. V primeru matrik A in B oblike
$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$
iz Givensovih rotacij sestavi ortogonalni matriki Q in Z, da bosta matriki QAZ in QBZ oblike
$$QAZ = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad QBZ = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Dani sta simetrični in pozitivno definitni matriki A in B reda n. Matrika A je tridiagonalna, matrika B pa diagonalna. S potenčno metodo računamo maksimalno in minimalno lastno vrednost posplošenega lastnega problema
$$Ax = \lambda Bx.$$
Za oba primera zapiši najbolj ekonomično metodo za en korak potenčne metode in preštej število množenj in deljenj.