NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

1.kolokvij

4.2.1999

1. Matrika A dimenzije $m \times n$ ima obliko $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, kjer je A_1 nesingularna matrika dimenzije $n \times n$ in A_2 matrika dimenzije $(m-n) \times n$. Pokaži, da velja
$$\|A^+\|_2 \le \|A_1^{-1}\|_2.$$

2. Zapiši ekonomičen algoritem za izračun inverzne matrike B^{-1} matrike
$$B = \begin{bmatrix} A & a \\ b^T & \alpha \end{bmatrix},$$
kjer sta $a, b \in \mathbb{C}^n$ in $\alpha \in \mathbb{C}$, poznan pa je tudi inverz matrike A^{-1}. Preštej število operacij. Kaj mora veljati za α, a in b, da je matrika B nesingularna?

3. Zapiši algoritem za reševanje Sylvestrove enačbe
$$AX - XB = C,$$
če sta A in B zgornji trikotni matriki s paroma različnimi diagonalnimi elementi $(a_{ii} \neq b_{kk},\ i, k = 1, \ldots, n)$.
Nasvet: Enačbo zapiši po stolpcih.

4. Za matriko $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definiramo kroge
$$K_i = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a_{ii}| \le \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\ \}, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Prvi Gerschgorinov izrek pravi, da lastne vrednosti matrike A ležijo v uniji krogov K_i, iz drugega Gerschgorinovega izreka pa sledi, da v izoliranem krogu K_i leži natanko ena lastna vrednost.

   (a) Dokaži prvi Gerschgorinov izrek. Nasvet: Po komponentah izenači $Ax = \lambda x$ in pravilno preoblikuj izraz.

   (b) Dana je matrika $A = \begin{pmatrix} 0.44331 & 2 \cdot 10^{-5} & -10^{-5} \\ 2 \cdot 10^{-5} & 0.76543 & 3 \cdot 10^{-5} \\ -10^{-5} & 3 \cdot 10^{-5} & 0.45169 \end{pmatrix}$.
   S pomočjo Gerschgorinovih izrekov dobi čim boljšo oceno za napako približka 0.76543 za lastno vrednost. Nasvet: Pomagaj si z matriko DAD^{-1}, kjer je $D = \mathrm{diag}(1, d, 1)$.