NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

1.kolokvij

2.2.2000

1. Naj bo $\|A\|_{p,q} := \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p}$, kjer je $1 \le p, q \le \infty$. Pokaži, da velja:

   (a) $\|A\|_{1,q} = \max\limits_j \|A(:,j)\|_q$,

   (b) $\|A\|_{p,\infty} = \max\limits_i \|A(i,:)\|_p^D$, kjer je $\|x\|_p^D := \max\limits_{\|w\|_p=1} |x^* w|$ dualna norma norme $\|.\|_p$.

2. Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zapiši ekonomičen algoritem za LU razcep matrike $I + xy^T$ brez pivotiranja in preštej število operacij.

3. S Householderjevimi zrcaljenji in QR razcepom reši linearni sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 6. \end{array}$$

   Zapiši vmesne rezultate!

4. Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ naj se da diagonalizirati in naj velja $AX = X\Lambda$ in $Y^T A = \Lambda Y^T$, kjer je $X = [\,x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\,]$, $Y = [\,y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n\,]$ in $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

   (a) Pokaži, da velja $\dfrac{1}{|s_i|} \le \|X\|_2 \|X^{-1}\|_2$, $i = 1, \ldots, n$, kjer je $s_i = \dfrac{y_i^* x_i}{\|x_i\|_2 \|y_i\|_2}$.

   (b) Izpelji zvezo $\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{x_i y_i^*}{s_i} = I$ in pokaži, da A ne more imeti natanko ene močno občutljive lastne vrednosti!