NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

1. kolokvij

2.2.2009

1. Uporabi Halleyevo metodo

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r) - \dfrac{f''(x_r)f(x_r)}{2f'(x_r)}}$$

za iskanje ničle funkcije $f(x) = x^n - a$, $n > 1$.

(a) Zapiši iteracijsko funkcijo in pokaži, da je konvergenca kubična.
Iteracijska funkcija je

$$g(x) = x - \frac{x^n - a}{nx^{n-1} - \frac{(n-1)}{2}(x^{n-1} - x^{-1})}.$$

Pri odvajanju bomo upoštevali $f(a) = 0$, $f'(a) = na^{n-1}$, $f''(a) = (n-1)f'(a)a^{-1}$, $f'''(a) = (n-1)(n-2)f'(a)a^{-2}$, $f^{(4)}(a) = (n-1)(n-2)(n-3)f'(a)a^{-3}$.
Označimo

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) - h(x)}, \text{ kjer je } h(x) = \frac{f''(x)f(x)}{2f'(x)}.$$

Računajmo

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x) - h(x)} + f(x)\frac{f''(x) - h'(x)}{(f'(x) - h(x))^2}.$$

Dobimo $g'(a) = 1 - \frac{f'(a)}{f'(a)} = 0$. Upoštevali smo $f(a) = 0$ in $h(a) = 0$. Izračunati moramo še

$$h'(x) = \frac{f'''(x)f(x) + f''(x)f'(x)}{2f'(x)} - \frac{f''(x)^2 f(x)}{2f'(x)^2}.$$

Ugotovimo še $h'(a) = \frac{(n-1)a^{-1}f'(a)^2}{2f'(a)} = \frac{n-1}{2}f'(a)a^{-1}$.
Računajmo

$$g''(x) = -\frac{f''(x)}{f'(x) - h(x)} + f(x)\left(\frac{f''(x) - h'(x)}{(f'(x) - h(x))^2}\right)' + 2f'(x)\frac{f''(x) - h'(x)}{(f'(x) - h(x))^2}.$$

Označimo še

$$u(x) = \frac{f''(x) - h'(x)}{(f'(x) - h(x))^2}.$$

Velja $u(a)f'(a) = \frac{n-1}{2}a^{-1}$. Tako imamo

$$g''(x) = -\frac{f''(x)}{f'(x) - h(x)} + f(x)u'(x) + 2f'(x)u(x).$$

Ko vstavimo a, dobimo

$$g''(a) = -\frac{(n-1)f'(a)a^{-1}}{f'(a)} + 2\frac{n-1}{2}a^{-1} = 0.$$

Izračunati moramo še $h'(x)$, izpustili bomo vse člene z $f(x)$, saj so enaki 0.

$$h''(x) = \frac{2f'''(x)f'(x) + f''(x)^2}{2f'(x)} - \frac{f''(x)^2 f'(x)}{2f'(x)^2} - \frac{f''(x)^2 f'(x)}{2f'(x)^2} + f(x) * r(x).$$

Tako dobimo

$$h''(a) = \frac{1}{2}(n-1)^2 f'(a)a^{-2} - \frac{1}{2}(n-1)^2 f'(a)a^{-2} = \frac{1}{2}(n-1)(n-3)f'(a)a^{-2}.$$

Z enakim postopkom izračunajmo še $g'''(x)$. Velja $u(a)f'(a) = \frac{n-1}{2}a^{-1}$.

$$g'''(x) = -\frac{f'''(x)}{f'(x) - h(x)} + 3f''(x)u(x) + 3f'(x)u'(x) + f(x) * r(x).$$

Izračunati moramo še $u'(a)$.

$$u'(x) = \frac{f'''(x) - h''(x)}{(f'(x) - h(x))^2} - 2\frac{(f''(x) - h'(x))^2}{(f'(x) - h(x))^3}.$$

Dobimo

$$u'(a)f'(a) = \frac{1}{2}(n-1)^2 a^{-2} - \frac{1}{2}(n-1)^2 a^{-2} = 0.$$

Dobili smo

$$g'''(a) = -(n-1)(n-2)a^{-2} + \frac{3}{2}(n-1)a^{-1}\frac{n-1}{2}a^{-1} \neq 0.$$

(b) Naredi dva koraka za $a = 15, n = 5$ in začetni približek $x_0 = 1.8$. Vmesne rezultate zapiši na 5 decimalk natančno. $x_1 = g(1.8) = 1.71911$, $x_2 = g(x_1) = 1.71877$.

2. Naredi LU razcep z delnim pivotiranjem matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Poišči permutacijsko matriko P in matriki L in U, da velja $PA = LU$. S pomočjo razcepa poišči inverz matrike A.

Računajmo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \underline{4} & 1 & 3 & 0 & 01 & \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \underline{-\frac{7}{4}} & \frac{11}{4} & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\overset{2\updownarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{11}{4} & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \overset{G}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{11}{4} & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{5}{7} & 1 & -\frac{9}{7} \end{bmatrix} \overset{inverz}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{11}{4} & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\overset{inverz}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{11}{4} & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \overset{inverz}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{13}{4} \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{7}{48} & \frac{77}{48} & \frac{21}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\overset{inverz}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{13}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{11}{12} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \overset{inverz}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{12} & \frac{11}{12} & -\frac{9}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{9}{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightrightarrows \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{7} & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

3. Dan je sistem $m+n$ enačb za $m+n$ neznank

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix},$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ in $c \in \mathbb{R}^n$. Pokaži, da velja:

(a) Matrika sistema je nesingularna.
Možnih je več rešitev. Če izračunamo kvadrat matrike, dobimo

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ A^T & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + AA^T & 0 \\ 0 & I + A^TA \end{bmatrix}.$$

Matriki AA^T in A^TA sta obe definitni in imata lastne vrednosti večje ali enake 0. Upoštevamo še, da so lastne vrednosti matrike $B+I$ ravno lastne vrednosti matrike $B+1$. Velja namreč $(I+B)x = x + Bx = x + \lambda x = (1+\lambda)x$.
Druga možnost je, da pokažemo trivialnost jedra. Zapišemo enačbe po blokih in dobimo

$$\begin{aligned} y + Ax &= 0 \\ A^Ty - x &= 0 \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo y z x in dobimo, da bi moralo veljati

$$-(A^TA + I)x = 0.$$

(b) Pokaži, da x' minimizira

$$||Ax - b||_2^2 + ||x + c||_2^2.$$

Zapišimo bločno

$$||Ax - b||_2^2 + ||x + c||_2^2 = ||\begin{bmatrix} Ax - b \\ x + c \end{bmatrix}||_2 = ||\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix}||_2$$

Zdaj lahko tvorimo normalni sistem

$$\begin{bmatrix} A^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} A^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix} = (A^TA + I)x = A^Tb - c.$$

Iz enačb zgoraj pa dobimo

$$\begin{aligned} y + Ax &= b \\ A^Ty - x &= c. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $y = b - Ax$ in vstavimo v drugo. Dobimo

$$A^Tb - A^TAx - x = c \leftrightarrow (A^TA + I)x = A^Tb - c.$$

4. Dana sta vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zapiši ekonomičen algoritem za LU razcep matrike $A = I + xy^T$ brez pivotiranja.

(a) Poišči LU razcep za primer $n = 3$. Naredimo razcep za $n = 3$. Velja

$$A = I + xy^T = \begin{bmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & 1 + x_3y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{x_2y_1}{1+x_1y_1} & 1 & \\ \frac{x_3y_1}{1+x_1y_1} & \frac{x_3y_2}{1+x_1y_1+x_2y_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ & \frac{x_2y_2}{1+x_1y_1} + 1 & \frac{x_2y_3}{1+x_1y_1} \\ & & \frac{x_3y_3}{1+x_1y_1+x_2y_2} + 1 \end{bmatrix}$$

(b) S pomočjo prejšnje točke in uporabe indukcije poišči LU razcep za splošen primer. Iz prejšnje točke razberemo

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \frac{x_iy_j}{1 + \sum_{k=1}^{j} x_ky_k} \\ u_{ij} &= \frac{x_iy_j}{1 + \sum_{k=1}^{i-1} x_ky_k} \end{aligned}$$

Zapišimo

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} L_n & 0 \\ l^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n & u \\ 0 & uu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_nU_n & L_nu \\ l^TU_n & uu \end{bmatrix}.$$

Iz enoličnosti LU razcepa dobimo $L_nU_n = A_n$. Rešimo sistem $L_nu = \begin{bmatrix} x_1y_{n+1} & \dots & x_ny_{n+1} \end{bmatrix}^T$ in dobimo, da u zadošča naši predpostavki, saj smo analogen sistem rešili že za prejšnji stolpec. Podobno rešimo še sistem

$$l^TU_n = \begin{bmatrix} x_{n+1}y_1 & \dots & x_{n+1}y_n \end{bmatrix}$$

in dobimo, da l zadošča naši predpostavki, saj smo analogen sistem rešili že prej. Izračunamo še $l^Tu + 1 = uu$. Ugotovimo, da velja $u_{n+1,n+1} = uu$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_iy_ix_{n+1}y_{n+1}}{(1 + \sum_{k=1}^{i} x_ky_k)(1 + \sum_{k=1}^{i-1} x_ky_k)} + uu = 1 + x_{n+1}y_{n+1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_iy_ix_{n+1}y_{n+1}}{(1 + \sum_{k=1}^{i} x_ky_k)(1 + \sum_{k=1}^{i-1} x_ky_k)} + 1 + \frac{x_{n+1}y_{n+1}}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} x_ky_k} \right)$$

$$+ \frac{x_ny_nx_{n+1}y_{n+1}}{(1 + \sum_{k=1}^{n} x_ny_n)(1 + \sum_{k=1}^{n-1} x_ky_k)} - \left(1 + \frac{x_{n+1}y_{n+1}}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} x_ky_k} \right) + uu = 1 + x_{n+1}y_{n+1}$$

$$1 + x_{n+1}y_{n+1} + \frac{x_{n+1}y_{n+1}}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} x_ky_k} \frac{x_ny_n - 1 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k}{\sum_{k=1}^{n} x_ky_k} - 1 + uu = 1 + x_{n+1}y_{n+1}.$$

Tako dobimo

$$uu = 1 + \frac{x_{n+1}y_{n+1}}{1 + \sum_{k=1}^{n} x_ky_k}.$$

(c) Zapiši algoritem in preštej število operacij.

```
s_0 = 1;
for i = 1 : n do
    s_i = s_{i-1} + x_i y_i;
    p_i = y_i / s_i;
    q_i = x_i / s_{i-1};
end
for i = 2 : n do
    for j = 1 : i-1 do
        l_ij = x_i p_j;
    end
    u_ii = s_i / s_{i-1};
    for j = i+1 : n do
        u_ij = q_i y_j;
    end
end
for i = 1 : n do
    u_1i = x_1 y_i;
end
u_11 = 1 + u_11;
```

Število operacij je $n^2 + 1 + 4n - 1 = n^2 + 4n$.