NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

1.kolokvij

13.1.1998

1. Naj bo A zgornja Hessenbergova matrika ($a_{ik} = 0, i > k+1$). Pokaži, da pri razcepu $PA = LU$ z Gaussovo metodo z delnim pivotiranjem velja, da je pivotna rast
$$R = \frac{\max |U_{ij}|}{\max |A_{ij}|}$$
omejena z n, kjer je n dimenzija matrike A.

2. Pascalova matrika velikosti 5 je
$$P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix},$$
sicer pa je (i,j)-ti element matrike P_n enak $\binom{i+j-2}{j-1}$.
   (a) Izračunaj razcep Choleskega za P_5 in iz dobljenega razcepa postavi svojo hipotezo o razcepu Choleskega za P_n.
   (b) Dokaži svojo hipotezo.

   Nasvet: Pri točki b) si mogoče lahko pomagaš z dejstvom $(x+y)^{a+b} = (x+y)^a(y+x)^b$.

3. Pri QR razcepu $A = QR$ tridiagonalne matrike $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c_n & a_n \end{bmatrix}$ dobimo matriko $R = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & & \\ & u_2 & v_2 & w_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$.
Zapiši algoritem za izračun matrike R in preštej število operacij.

4. Naj bodo A, B, C matrike takih dimenzij, da je produkt A^TCB^T dobro definiran. Pokaži, da ima izmed vseh matrik X, ki minimizirajo normo $\|AXB - C\|_F$, matrika $X_0 = A^+CB^+$ minimalno normo $\|X\|_F$.
Nasvet: Pomagaj si s singularnima razcepoma matrik A in B.