Numerična linearna algebra 2000/2001

1. kolokvij

10.1.2001

1. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $b \in \mathbb{R}^n$, ter definirajmo preslikavo $F(u) = Au + b$. Naj bosta x in x^* različna vektorja iz $\mathbb{R}^n$. Definirajmo $p = x^* - x$ in $q = F(x^*) - F(x) = Ap$. Pokaži, da za matriko B^*,

$$B^* := B + (p^T p)^{-1}(q - Bp)p^T,$$

velja

   a.) $B^*p = Ap = q$,

   b.) $||B^* - A||_2 \leq ||B - A||_2$.

2. Pri numeričnem reševanju parcialnih diferencialnih enačb moramo pogosto reševati sisteme z bločno-tridiagonalno matriko

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & & \\ B_2 & A_2 & C_2 & \\ & & \ddots & \\ & & B_n & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

kjer so $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}^{m\times m}, x_i, y_i \in \mathbb{R}^m$. Sestavi učinkovito metodo bločne faktorizacije za reševanje takih sistemov, in preštej število operacij.

3. Dan je sistem $p + q$ enačb za $p + q$ neznank

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix},$$

kjer: $A \in \mathbb{R}^{p\times q}, b \in \mathbb{R}^p, c \in \mathbb{R}^q$.

   a.) Pokaži, da je matrika sistema nesingularna.

   b.) Dokaži, da x' minimizira

$$||Ax - b||_2^2 + ||x + c||_2^2 \ .$$

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, in rang(A)=n. Znan je QR razcep matrike A, $A = QR$. Zapiši ekonomičen algoritem za izračun matrike $B = (A^T A)^{-1}$ in preštej število operacij.