

Numerična linearna algebra 2002/2003

1. kolokvij

15.1.2003

1. Dana je matrika $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in vektor $s \in \mathbb{R}^n, s \neq 0$.

Dokaži:

$$\left\| E \left(I - \frac{ss^T}{s^T s} \right) \right\|_F^2 = \|E\|_F^2 - \frac{\|Es\|_2^2}{s^T s}.$$

2. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivno definitni matriki. Zapiši ekonomičen algoritem za izračun zgornje trikotne matrike X , ki zadošča enačbi $X^T A X = B$, in preštej število operacij. Ali je rešitev enolična?
3. Za reševanje enačbe $e^x = \frac{1}{x}$ bomo uporabili iteracijsko formulo

$$x_{r+1} = \frac{x_r(1 + x_r)}{1 + 2x_r + \log x_r}.$$

a.) Izračunaj red konvergence te iteracije.

b.) S pomočjo gornje iteracije izračunaj rešitev na 6 decimalk natančno. Za začetni približek vzemi $x_0 = 0.5$.

4. Dana je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$, ranga n , in vektorja $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^m$. Naj bo matrika $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ in $d \in \mathbb{R}^p$.

a.) Poišči $x \in \mathbb{R}^n$, ki minimizira izraz

$$\|Ax - b_1\|_2^2 + \|Ax - b_2\|_2^2,$$

in dokaži, da je rešitev enolična.

b.) Poišči y , ki minimizira

$$y^T y + \|By - d\|_2^2,$$

in pokaži, da je rešitev enolična.