Numerična linearna algebra

1. kolokvij

22.1.2007

1. S pomočjo tangentne metode sestavite algoritem, ki bo s tremi osnovnimi operacijami $+, -, \cdot$ izračunal $1/a$ za $a > 0$ (pri izpeljavi lahko uporabite deljenje, v algoritmu pa deljenj ne sme biti). Določite, kje lahko vzamemo začetni približek, tako, da bo iteracija zagotovo konvergirala.

   Nasvet: Najprej izberite primerno funkcijo f, tako da je $f(1/a) = 0$.

2. Naj bo
$$\|A\|_{\alpha,\beta} := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\alpha},$$
   kjer sta $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ vektorski normi. Pokažite, da velja
   a) $\|A\|_{1,\beta} = \max_j \|A(:,j)\|_\beta$,
   b) $\|A\|_{\alpha,\infty} = \max_i \|A(i,:)\|_\alpha^D$, kjer je $\|x\|_\alpha^D := \max_{\|w\|_\alpha = 1} |x^H w|$ dualna norma norme $\|\cdot\|_\alpha$.

   Nasvet: $Ax = \sum_j x_j A(:,j)$.

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljiva matrika, in $u, v, b \in \mathbb{R}^n$. Recimo, da imamo dano tudi matriko $B := A^{-1}$ in da velja $1 + v^T B u \neq 0$.
   a) Dokažite, da velja Sherman-Morrison-ova formula
$$(A + uv^T)^{-1} = B - \frac{Buv^T B}{1 + v^T Bu}.$$
   b) Sestavite učinkovit algoritem za reševanje sistema $(A + uv^T)x = b$ in preštejte število operacij.

4. Recimo, da smo že rešili sistem linearnih enačb s pozitivno definitno matriko $Ax = b$ z metodo Choleskega. Zapišite ekonomičen algoritem za reševanje razširjenega sistema
$$\begin{bmatrix} A & a \\ a^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \delta \end{bmatrix},$$
   ki ga dobimo iz prejšnjega sistema tako, da dodamo eno vrstico in en stolpec ter en element v vektor na desni strani (tako, da je tudi razširjena matrika simetrična pozitivno definitna). Preštejte število dodatnih operacij.