

Numerična linearna algebra

1. kolokvij

31.1.2008

1. S tangentno metodo izpeljite iterativno metodo za izračun $\sqrt[n]{a}$, kjer je $a > 0$ in $n > 1$ naravno število. Za katere začetne približke je metoda konvergentna? Z izpeljano metodo izračunajte $\sqrt[5]{5}$ na 6 decimalk natančno.
2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zgornja Hessenbergova matrika ($a_{ik} = 0, i > k + 1$). Dana so števila $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Sestavite učinkovit algoritem za izračun prvega stolpca matrike $M = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_r I)$ in preštejte število operacij.
3. Dani sta matriki $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dokažite:
 - a) Matriki XY in YX imata enake lastne vrednosti.
 - b) Če je matrika XY simetrična, velja $\|XY\|_F \leq \|YX\|_F$.
 - c) Če sta matriki XY in YX simetrični, v točki b) velja enakost.
4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ in $\text{rang}(A) = n$. Variančno-kovariančna matrika je definirana kot $X = (A^T A)^{-1}$. V statističnih izračunih pogosto potrebujemo samo diagonalne elemente matrike X . Sestavite učinkovit algoritem za izračun x_{ii} , $i = 1, \dots, n$, in preštejte število operacij. Pomagajte si s QR razcepom matrike A , ki je znan že vnaprej.