# NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

## 2. kolokvij

19.5.1998

1. Matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ naj se da diagonalizirati kot $X^{-1}AX = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Naj bosta $\lambda$ in $z$ približka za lastni par matrike $A$ in $r = Az - \lambda z$ ostanek. Izpelji oceno:

$$\min_{1\le i\le n} |\lambda_i - \lambda| \le \kappa(X)\frac{\|r\|}{\|x\|}.$$

   Zapiši še preprostejšo oceno za primer, ko je matrika $A$ simetrična.

2. Prevedi iskanje singularnih vrednosti in vektorjev matrike $A = B + iC$, $B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ na iskanje singularnih vrednosti in vektorjev realne matrike. Kakšen je dobljeni realni problem in kako iz njegovih rešitev dobimo rešitve prvotnega problema?

3. (a) Naj bo $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ realna matrika oblike $T = \begin{pmatrix} a & t \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Poišči tako ortogonalno matriko $Q = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$, da bo matrika $T' = QTQ^T$ oblike $T' = \begin{pmatrix} b & t \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

   (b) Pri $QR$ algoritmu brez pivotiranja na koncu diagonalni elementi zgornje trikotne matrike $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ niso urejeni po absolutni vrednosti. Kako bi poiskal ortogonalno matriko $Q$, ki bi v matriki $R' = QRQ^T$ uredila diagonalne elemente po absolutni vrednosti?

4. (a) Dokaži, da Jacobijeva iterativna metoda konvergira za matriko $A$ natanko tedaj, ko konvergira za matriko $A^T$.

   (b) Preuredi sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   tako, da bo Jacobijeva iterativna metoda zagotovo konvergirala.