

NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

2. kolokvij

26.5.1999

1. Naj bo A simetrična matrika z lastnimi pari $Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, \dots, n$, in naj bo enotski vektor x aproksimacija za lastni vektor x_1 . Pokaži, da za Rayleighov kvocient $\rho(A, x)$ velja ocena

$$|\rho(A, x) - \lambda_1| \leq 2\|A\|\|x - x_1\|^2.$$

2. Simetrični realni matriki A in B naj komutirata. Pokaži, da obstaja taka ortogonalna matrika Q , da sta matriki QAQ^T in QBQ^T obe diagonalni.

Nasvet: Najprej predpostavi, da ima matrika A same enostavne lastne vrednosti, nato pa se znebi te omejitve.

3. Matrika A naj bo simetrična in pozitivno definitna, matrika H pa taka, da je matrika $A - H^T A H$ pozitivno definitna. Pokaži, da za spektralni radij matrike H velja $\rho(H) < 1$.

4. Z Arnoldijevim algoritmom in metodo GMRES izračunaj približek za rešitev linearnega sistema $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za dimenzijo podprostora Krilova vzemi $k = 2$.