NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

2.kolokvij

17.5.2000

1. Naj bo A realna matrika reda n, za katero velja $a_{ij} \leq 0$ za $i \neq j$ in $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ za $i = 1, \ldots, n$. Pokaži, da od tod sledi $\det A > 0$.

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika oblike $A = [A_1\ A_2]$, kjer je $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ in $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$. Naj bodo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ singularne vrednosti matrike A in $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau_m \geq 0$ singularne vrednosti matrike A_1. Dokaži, da velja:
$$\sigma_j \geq \tau_j \geq \sigma_{j+n-m}.$$
Nasvet: Uporabi Cauchyjev izrek o prepletanju za matriko $A^T A$.

3. Ko se pri QZ algoritmu na diagonali matrike B pojavi 0, lahko naredimo deflacijo in dimenzijo problema zmanjšamo za ena. V primeru matrik A in B oblike
$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$
iz čim manj Givensovih rotacij sestavi ortogonalni matriki Q in Z, da bosta matriki QAZ in QBZ oblike
$$QAZ = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad QBZ = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Pri vsakem množenju matrik z Givensovo rotacijo (z leve ali desne) navedi, kako je bila izbrana rotacija in skiciraj, kateri elementi v obeh matrikah so neničelni po rotaciji.

4. Naj bo A realna matrika reda n.

   a) Pokaži, da iz konvergence iterativne Jacobijeve metode za reševanje sistema $Ax = b$ sledi konvergenca ekstrapolirane Jocobijeve metode (JOR)
   $$x^{(r+1)} = \Big((1-\omega)I + \omega D^{-1}(\widetilde{L} + \widetilde{U})\Big)x^{(r)} + wD^{-1}b$$
   za $0 < \omega \leq 1$.

   b) Za sistem enačb
   $$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$
   vzemi $x^{(0)} = [4/5\quad -7/10\quad 1/2]^T$ in izračunaj naslednji približek po metodi JOR z izbiro $\omega = 1/2$.