Numerična linearna algebra

2. kolokvij

17.5.2001

1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   a.) Pokaži, da za njeni lastni vrednosti λ_1, λ_2 velja neenakost

$$\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(2|a| + |b| + |c| + 2|d|) & , \quad a \neq d \\ \frac{1}{2}(|a| + |b| + |c| + |d|) & , \quad a = d \end{cases}.$$

   b.) Kdaj je ta ocena boljša od Gerschgorinovega izreka?
   (namig: najprej pokaži, da iz Gerschgorinovega izreka dobimo $\max_k |\lambda_k| \leq \max_i(\sum_j |a_{ij}|) = ||A||_\infty$.)

   c.) Ali velja posplošitev ocene za matrike $n \times n$

$$\max|\lambda| \leq \sum_i |a_{ii}| + \frac{1}{n} \sum_{i,j,\, i \neq j} |a_{ij}|\,?$$

2. Zgornja Hessenbergova matrika je nereducirana, če nima ničelnih poddiagonalnih elementov. Naj bo μ lastna vrednost nereducirane zgornje Hessenbergove matrike $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokaži: če je $\widetilde{H} = RU + \mu I$, kjer je $H - \mu I = UR$ QR-faktorizacija matrike $H - \mu I$, potem je $\widetilde{h}_{n,n-1} = 0$ in $\widetilde{h}_{n,n} = \mu$.
   (to nam pove: če pri QR iteraciji naredimo premik za lastno vrednost v natančni aritmetiki, nastopi deflacija v 1 koraku)

3. Dana je matrika A reda $m \times n$. Matriko B dobimo tako, da matriko A zarotiramo za 90 stopinj v smeri urinega kazalca. Naprimer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \end{bmatrix}.$$

   Ali imata A in B enake singularne vrednosti? Dokaži ali poišči protiprimer.

4. Pri QZ algoritmu za reševanje posplošenega problema lastnih vrednosti $Ax = \lambda Bx$ se pojavi naslednji problem. Dani sta matriki A in B oblike

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix},$$

   iščemo pa taki ortogonalni matriki Q in Z, da bo matrika $A_1 = QAZ$ zgornja Hessenbergova, matrika $B_1 = QBZ$ pa zgornja trikotna. S pomočjo Givensovih rotacij in Householderjevih zrcaljenj sestavi matriki Q in Z.