Numerična linearna algebra

2. kolokvij

19.5.2003

1. Sestavi učinkovit algoritem za izračun pomikov α_1 in α_2 pri QZ algoritmu, ki sta lastni vrednosti spodnje 2×2 glavne podmatrike matrike $C = AB^{-1}$. Pri tem je A nereducirana zgornja Hessenbergova, B pa nesingularna zgornje trikotna matrika. Namig: celotnega inverza matrike B ni potrebno izračunati.

2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} D & v \\ v^T & d_{nn} \end{bmatrix},$$
kjer je $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_{n-1})$, $d_i \neq d_j$, in vektor v nima ničelnih elementov. Naj bo λ lastna vrednost matrike A.

   a) Dokaži, da je matrika $D - \lambda I_{n-1}$ nesingularna.
   b) Dokaži, da velja
$$v^T(D - \lambda I)^{-1} v + \lambda - d_{nn} = 0.$$

3. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Prevedi računanje singularnega razcepa kompleksne matrike A na računanje singularnega razcepa v realnem primeru. Pokaži, da so vse singularne vrednosti v realnem primeru dvojne.

4. Naj bo A simetrična matrika z lastnimi pari $Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, 2, ..., n$. Naj bo vektor x, $||x||_2 = 1$, aproksimacija za lastni vektor x_1, in naj bo $\mu = \rho(A, x)$ Rayleighov kvocient za x.
   Dokaži, da velja:
$$|\mu - \lambda_1| \leq 2\,||A||_2||x - x_1||_2^2.$$