

Numerična linearna algebra

2. kolokvij

10.5.2004

1. Naj bo $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ireducibilna zgornja Hessenbergova matrika in $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Sestavi učinkovit algoritem za izračun $p(\lambda) = \det(H - \lambda I)$.

Nasvet: s pomočjo eliminacij na zadnjem stolpcu pretvori matriko v zgornjo Hessenbergovo matriko, ki ima zadnji stolpec oblike $g(\lambda)e_1$, nato izračunaj determinanto.

b) Sestavi ekonomičen algoritem za izračun $p'(\lambda)$.

Nasvet: uporabi nasvet pri točki a). S pomočjo zapisa zadnjega stolpca kot linearne kombinacije preostalih stolpcev s koeficienti $m_i(\lambda)$ sestavi rekurzivne enačbe za izračun vrednosti $g(\lambda)$. Dobljene enačbe odvajaj.

2. Dan je polinom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$. Dokaži, da za njegove ničle $z_j, j = 1, \dots, n$, velja:

a) $|z_j| \leq \max\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\}$,

b) $|z_j| \leq \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$.

Naj velja $a_i \neq 0, \forall i$ in definirajmo $a_n := 1$. Dokaži, da velja:

c) $|z_j| \leq \max\left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|, 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|, \dots, 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}$,

d) $|z_j| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right|$.

Nasvet: pomagaj si s pridruženo matriko polinoma in Gerschgorinovim izrekom.

3. Pri izračunu QR faktorizacije potrebujemo naslednji rezultat. Naj bo $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ in naj bodo $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$. Dokaži, da velja

$$(I + \beta_k u_k u_k^T)(I + \beta_{k-1} u_{k-1} u_{k-1}^T) \dots (I + \beta_1 u_1 u_1^T) = I + UTU^T,$$

kjer je matrika $T \in \mathbb{R}^{k \times k}$ spodnja trikotna matrika.

4. Separacijo med matrikama A_1 in A_2 definiramo z

$$\text{sep}(A_1, A_2) = \min_{X \neq 0} \frac{\|A_1 X - X A_2\|_F}{\|X\|_F}.$$

Dani sta matriki $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dokaži, da za $\lambda \in \lambda(B)$ in $\mu \in \lambda(C)$ velja

$$\text{sep}(B, C) \leq |\lambda - \mu|.$$

Nasvet: Pomagaj si s Schurovima formama matrik B in C .