Numerična linearna algebra

2. kolokvij

11.5.2005

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokaži, da za njene singularne vrednosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$ velja:
$$\sigma_i = \max_{\substack{E_i \subset \mathbb{R}^n \\ |E_i|=i}} \min_{\substack{x\in E_i \\ x\neq 0}} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \min_{\substack{F_i \subset \mathbb{R}^n \\ |F_i|=n-i+1}} \max_{\substack{x\in F_i \\ x\neq 0}} \frac{||Ax||_2}{||x||_2}.$$

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z Jordanovo formo J, v kateri so Jordanove kletke oblike
$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$
in $J_i = [\lambda_i]$, $i = 3, 4, \ldots, n$. Naj bo λ_1 dominantna lastna vrednost. Pokaži, da pri potenčni metodi na matriki A kvocient k-tih komponent vektorjev $x^{(r+1)}, x^{(r)}$ konvergira proti λ_1, ko gre $r \to \infty$.
(Nasvet: Naj bo $A = UJU^{-1}$, in $U = [u_1\, u_2\, \ldots\, u_n]$. Zapiši začetni vektor $x^{(0)}$ v bazi $u_1, u_2, \ldots, u_n$.)

3. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ 2 & 3 & 4 & & \\ & 4 & 5 & 6 & \\ & & 6 & 7 & 8 \\ & & & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$
S pomočjo 3-členske rekurzivne formule in Sturmovega zaporedja izračunaj število lastnih vrednosti matrike A na intervalu $[0, 10]$.

4. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $\epsilon > 0$. Definirajmo **psevdospekter** L_ϵ matrike A kot množico vseh števil $z \in \mathbb{C}$, ki zadoščajo kateremu od pogojev:
1) z je lastna vrednost matrike $A + \delta A$ za nek δA z $\|\delta A\|_2 \leq \epsilon$,
2) obstaja vektor $u \in \mathbb{C}^n$, z $\|(A - zI)u\|_2 \leq \epsilon$ in $\|u\|_2 = 1$,
3) $\sigma_n(A - zI) \leq \epsilon$,
4) $\|(A - zI)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$.
Tu je σ_n najmanjša singularna vrednost matrike $A - zI$. Če je z lastna vrednost matrike A, definiramo $\|(A - zI)^{-1}\|_2 = \infty$.

Dokaži, da so pogoji 1–4 ekvivalentni.