Numerična linearna algebra

2. kolokvij

18.5.2006

1. S pomočjo Householderjevih zrcaljenj in QR razcepa reši sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 6y - 2z &= -7 \\ 2x + y - 2z &= -1 \\ 2x + 2y + 6z &= 6. \end{aligned}$$

   Zapiši vmesne rezultate.
   Nasvet: Zrcaljenja se splača delati na matriki $[A\ b]$. Rezultat lahko enostavno preveriš tako, da ga vstaviš v sistem enačb.

2. Dani sta matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, rang(A)=n in $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Dokaži, da je matrika $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, ki minimizira

$$\|AX - B\|_F$$

   enaka $X = A^+B$.
   Nasvet: Zapiši matriki X in B po stolpcih in izračunaj $\|AX - B\|_F^2$.

3. Naj bo $A = [A_1\ A_2] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kjer je $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ in $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$. Naj bodo $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n$ singularne vrednosti matrike A in $\tau_1 \geq \cdots \geq \tau_m$ singularne vrednosti matrike A_1. Dokaži, da se singularne vrednosti prepletajo:

$$\sigma_j \geq \tau_j \geq \sigma_{j+n-m}.$$

   Nasvet: Najprej si oglej primer, ko je $m = n - 1$.

4. Naj bo $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. **Polje vrednosti** je definirano z

$$W(A) = \{x^HAx,\ \ x \in \mathbf{C}^n,\ x^Hx = 1\}.$$

   To je množica Rayleighovih kvocientov za $\|x\|_2 = 1$. Dokaži:

   (a) Če je A normalna, potem je množica $W(A) \subset \mathbf{C}$ enaka konveksni ovojnici lastnih vrednosti.
   Nasvet: Če je A normalna ($A^HA = AA^H$), se da diagonalizirati: $A = QDQ^H$, kjer je $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ in Q unitarna. Poljuben vektor $x \in \mathbf{C}^n$ lahko razvijemo po bazi $\{q_i\}$, kjer so q_i stolpci matrike Q.

   (b) $W(A)$ vsebuje konveksno ovojnico lastnih vrednosti matrike A.
   Nasvet: Naj bo $\lambda_i = x^HAx$ in $\lambda_j = y^HAy$. Definirajmo $v = \alpha x + \beta y$. Poišči pogoje za skalarja $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, da bo $v^HAv = t\lambda_i + (1-t)\lambda_j$, $t \in (0, 1)$.

   Opomba: **Konveksna ovojnica** množice točk $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \in \mathbf{C}^n$ je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje S. Opišemo jo lahko kot množico točk

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i,\ \ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$