Numerična linearna algebra

2. kolokvij

18.5.2007

1. *Lokalna baza* v računalniški grafiki je urejena trojica ortonormiranih vektorjev $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, ki določa lokalni koordinatni sistem.

   Dani sta lokalni bazi $b_1 : 1/3\,[1, -2, 2]^T, 1/3\,[-2, -2, -1]^T, 1/3\,[-2, 1, 2]^T$ in $b_2 : 1/2\,[\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0]^T, 1/2\,[-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0]^T, [0, 0, 1]^T$. Poiščite transformacijsko (ortogonalno) matriko R, ki preslika bazo b_1 v b_2 na naslednji način.

   a) Določite Householderjevo zrcaljenje, ki preslika z os prve baze v z os druge baze.
   b) Poiščite rotacijo, ki zavrti novo x os v pravo smer (x smer baze b_2). To je rotacija v ravnini x-y (uporabite idejo Givensove rotacije).
   c) Sestavite R. Kam se z R preslika vektor $[1, 1, 1]^T$?

2. Dana je Sylvestrova enačba $AX - XB = C$, kjer je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ in $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Poiščite rešitev Sylvestrove enačbe, tako da uporabite naslednje korake:

   a) S pomočjo Schurovih form za A in B pretvorite enačbo v obliko $A'Y - YB' = C'$, kjer sta matriki A' in B' zgornje trikotni.
   b) S pomočjo a) sestavite algoritem za izračun Y, nato pa izrazite X.
   c) Kakšen pogoj mora biti izpolnjen, da ima enačba rešitev?

   Nasvet: matriko Y zapišite po stolpcih $Y = [y_1\, y_2\, \ldots\, y_m]$ in izračunajte vsak stolpec posebej.

3. Naj bo $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, in $\|P^TP - I\|_2 =: \epsilon < 1$. Dokažite, da vse singularne vrednosti matrike P ležijo na intervalu $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$, in da velja

   $$\|P - UV^T\|_2 \le \epsilon,$$

   kjer je $P = U\Sigma V^T$ singularni razcep matrike P.

4. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $R_i := \sum_{j\neq i} |a_{ij}|,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Cassinijevi ovali so definirani z

   $$O_{ij} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}||z - a_{jj}| \le R_iR_j\}, \quad \forall i \neq j.$$

   a) Dokažite Brauerjev izrek: $\lambda(A) \subseteq \bigcup_{i\neq j} O_{ij}$.
      Nasvet: Posnemajte dokaz Geršgorinovega izreka in glejte dve po absolutni vrednosti največji komponenti lastnega vektorja.
   b) Naj za vse $i \neq j$ velja $|a_{ii}|\,|a_{jj}| > R_iR_j$. Dokažite, da je matrika A nesingularna.
   c) Dokažite, da je Brauerjev izrek močnejši od Geršgorinovega:

      $$\bigcup_{i\neq j} O_{ij} \subseteq \bigcup_i C_i,$$

      kjer so $C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le R_i\}$ Geršgorinovi krogi.

   Če točke a) ne znate dokazati, dokažite b) in c). Pri tem uporabite točko a).