Numerična linearna algebra

2. kolokvij

23.5.2008

1. Dana je matrika $A = [3\ 0\ 4]$. Izračunajte singularni razcep matrike A.

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika, $s \in \mathbb{R}$ dano število in $x \in \mathbb{R}^n$ neničelen vektor. Dokažite, da obstaja lastna vrednost λ matrike A, tako, da velja
$$|\lambda - s| \leq \frac{\|Ax - sx\|_2}{\|x\|_2}.$$
Nasvet: $x = (A - sI)^{-1}(A - sI)x$.

3. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in oznaka $x > 0$ za $x \in \mathbb{R}^n$ pomeni, da so vse komponente vektorja x pozitivne. Definirajmo *minimalno Geršgorinovo množico*
$$G(A) = \bigcap_{x>0} G_x(A), \quad G_x(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{x_i} \sum_{j\neq i} |a_{ij}| x_j \right\}.$$
Dokažite: Naj bo $\Lambda(A)$ množica lastnih vrednosti matrike A. Potem velja $\Lambda(A) \subseteq G(A)$.
Nasvet: pomagajte si s primerno izbrano matriko, podobno matriki A, in Geršgorinovim izrekom.

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zgornja Hessenbergova, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pa zgornje trikotna matrika. Rešujemo posplošeni problem lastnih vrednosti $Ax = \lambda Bx$. Dokažite, da v naslednjih primerih pride do deflacije (problem razpade v dva podproblema):

    a) Matrika A je reducibilna ($a_{k+1,k} = 0$ za nek k).

    b) Matrika B je singularna ($b_{kk} = 0$ za nek k).
    Nasvet: naj bo $n = 5$ in $k = 3$, neničelni elementi matrik naj bodo označeni z "x". Dokažite, da se da s pomočjo Givensovih rotacij konstruirati ortogonalni matriki Q in Z, da bo $A' = QAZ$ zgornja Hessenbergova, $B' = QBZ$ zgornje trikotna in $a'_{n,n-1} = 0$. Na vsakem koraku z "" označite elemente, ki se spremenijo.*