NUMERIČNA LINEARNA ALGEBRA

2. kolokvij

18.5.2009

1. Naredite QR razcep matrike
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & \frac{28}{5} & -7 \end{bmatrix}$$
s pomočjo Householderjevih zrcaljenj. Z njegovo pomočjo izračunajte še determinanto matrike A. Kakšna je determinanta Householderjevega zrcaljenja?

2. Podana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} I & Z \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$
Pokažite, da za občutljivost matrike velja: $\sqrt{\kappa(A)} = ||A||_2||A^{-1}||_2$ velja
$$\kappa(A) = \frac{2 + \sigma_1^2 + \sqrt{4\sigma_1^2 + \sigma_1^4}}{2},$$
kjer je σ_1 največja singularna vrednost matrike Z.

3. Podana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Matriko z ortogonalnimi podobnostnimi transformacijami pretvorite v obliko
$$QAQ^T = \begin{bmatrix} 0 & \times & \times \\ 0 & -3 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
S pomočjo matrike Q zapišite še vektor v jedru A, iz začetne matrike pa preberite lastni vektor za $\lambda = -3$. Ali sta vektorja ortogonalna?
Nasvet. Najprej poiščite primerno Givensovo rotacijo Q_1, ki zamenja 0 in λ,
$$Q_1 \begin{bmatrix} \lambda & \times \\ & 0 \end{bmatrix} Q_1^* = \begin{bmatrix} 0 & \times \\ & \lambda \end{bmatrix}.$$

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična semipozitivno definitna matrika, tj. $x^T Ax \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokažite, da velja
   (a) $|a_{ij}| \leq (a_{ii} + a_{jj})/2$,
   (b) $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$,
   (c) $\max_{ij} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}$,
   (d) $a_{ii} = 0 \Rightarrow A(i, :) = 0,\ A(:, i) = 0$.

   Nasvet. Enakost (a) najlažje dokažete, če izberete primeren vektor x.