14. Primeri uporabe singularnega razcepa - korekcija zamegljenih fotografij

Bor Plestenjak

NLA

31. maj 2011

Korekcija zamegljenih fotografij

Korekcija zamegljenih fotografij

Predstavitev slik

Slike so v elektronski obliki predstavljene kot matrike. Iz

$$A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&8&8&8&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&8&8&8&0&4&4&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

v Matlabu z ukazi

```
imagesc(A), axis image, colormap(gray)
```

Predstavitev slik

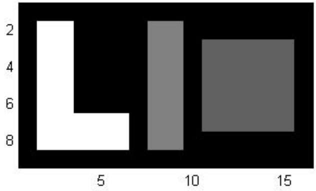
Slike so v elektronski obliki predstavljene kot matrike. Iz

$$A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&0&0&0&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&8&8&8&0&4&4&0&3&3&3&3&3&0\\ 0&8&8&8&8&8&0&4&4&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

v Matlabu z ukazi

```
imagesc(A), axis image, colormap(gray)
```

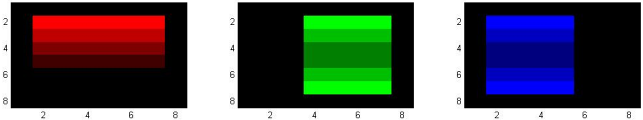
dobimo



Barvne slike

Na podoben način so barvne slike predstavljene s tridimenzionalnimi matrikami.

$$R = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&8&8&8&8&8&8&0 \\ 0&6&6&6&6&6&6&0 \\ 0&4&4&4&4&4&4&0 \\ 0&2&2&2&2&2&2&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&8&8&8&8&0 \\ 0&0&0&6&6&6&6&0 \\ 0&0&0&4&4&4&4&0 \\ 0&0&0&4&4&4&4&0 \\ 0&0&0&6&6&6&6&0 \\ 0&0&0&8&8&8&8&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&8&8&8&8&0&0&0 \\ 0&6&6&6&6&0&0&0 \\ 0&4&4&4&4&0&0&0 \\ 0&4&4&4&4&0&0&0 \\ 0&6&6&6&6&0&0&0 \\ 0&8&8&8&8&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

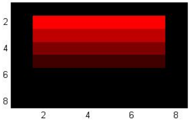


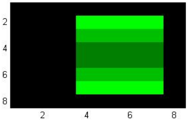

```
X(:,:,1)=R/8; X(:,:,2)=G/8; X(:,:,3)=B/8; imagesc(X)
```

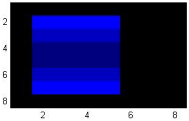
Barvne slike

Na podoben način so barvne slike predstavljene s tridimenzionalnimi matrikami.

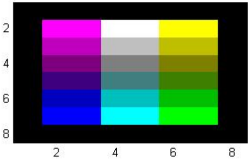
$$R=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&8&8&8&8&8&8&0\\0&6&6&6&6&6&6&0\\0&4&4&4&4&4&4&0\\0&2&2&2&2&2&2&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&8&8&8&8&0\\0&0&0&6&6&6&6&0\\0&0&0&4&4&4&4&0\\0&0&0&4&4&4&4&0\\0&0&0&6&6&6&6&0\\0&0&0&8&8&8&8&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&8&8&8&8&0&0&0\\0&6&6&6&6&0&0&0\\0&4&4&4&4&0&0&0\\0&4&4&4&4&0&0&0\\0&6&6&6&6&0&0&0\\0&8&8&8&8&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$








```
X(:,:,1)=R/8; X(:,:,2)=G/8; X(:,:,3)=B/8; imagesc(X)
```



Branje zunanjih slik

Zunanje slike preberemo v Matlab s pomočjo ukaza `imread`. Tako npr. iz

```
A = imread('butterflies.tif');
imagesc(A), axis image
```

Branje zunanjih slik

Zunanje slike preberemo v Matlab s pomočjo ukaza `imread`. Tako npr. iz

```
A = imread('butterflies.tif');
imagesc(A), axis image
```

v Matlabu dobimo tridimenzionalno matriko $A \in \mathbb{R}^{474\times852\times3}$, ki predstavlja sliko

Zamegljene slike

$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$: originalna oziroma željena jasna slika

$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$: dejanska zamegljena slika, ki jo imamo na voljo in bi jo radi izboljšali

Zamegljene slike

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$: originalna oziroma željena jasna slika

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$: dejanska zamegljena slika, ki jo imamo na voljo in bi jo radi izboljšali

Razlogov, zaradi katerih je slika zamegljena, je veliko, npr:

Zamegljene slike

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$: originalna oziroma željena jasna slika

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$: dejanska zamegljena slika, ki jo imamo na voljo in bi jo radi izboljšali

Razlogov, zaradi katerih je slika zamegljena, je veliko, npr:

- napačno ocenjena razdalja do objekta,

Zamegljene slike

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$: originalna oziroma željena jasna slika

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$: dejanska zamegljena slika, ki jo imamo na voljo in bi jo radi izboljšali

Razlogov, zaradi katerih je slika zamegljena, je veliko, npr:

- napačno ocenjena razdalja do objekta,
- premikanje objekta ali kamere,

Zamegljene slike

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$: originalna oziroma željena jasna slika

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$: dejanska zamegljena slika, ki jo imamo na voljo in bi jo radi izboljšali

Razlogov, zaradi katerih je slika zamegljena, je veliko, npr:

- napačno ocenjena razdalja do objekta,
- premikanje objekta ali kamere,
- atmosferske motnje pri astronomiji.

Zamegljene slike

$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$: originalna oziroma željena jasna slika

$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$: dejanska zamegljena slika, ki jo imamo na voljo in bi jo radi izboljšali

Razlogov, zaradi katerih je slika zamegljena, je veliko, npr:

- napačno ocenjena razdalja do objekta,
- premikanje objekta ali kamere,
- atmosferske motnje pri astronomiji.

Če poznamo matematično ozadje zgornjih težav, lahko dobljeno sliko izboljšamo.

Linearni model

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$: originalna (jasna) slika

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$: dejanska (zamegljena) slika

Preprost linearni model pravi, da je zameglitev vrstic neodvisna od zameglitve stolpcev. Tedaj obstajata obrnljivi matriki $A_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je

$$A_c X A_r^T = B.$$

Linearni model

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$: originalna (jasna) slika

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$: dejanska (zamegljena) slika

Preprost linearni model pravi, da je zameglitev vrstic neodvisna od zameglitve stolpcev. Tedaj obstajata obrnljivi matriki $A_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je

$$A_c X A_r^T = B.$$

Če poznamo A_c in A_r, bi lahko izračunali $X = A_c^{-1} B A_r^{-1}$.

Linearni model

$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$: originalna (jasna) slika

$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$: dejanska (zamegljena) slika

Preprost linearni model pravi, da je zameglitev vrstic neodvisna od zameglitve stolpcev. Tedaj obstajata obrnljivi matriki $A_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$ in $A_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je

$$A_c X A_r^T = B.$$

Če poznamo A_c in A_r, bi lahko izračunali $X = A_c^{-1} B A_r^{-1}$.

To se ne izkaže za dober pristop, saj v resnici slika B vsebuje še dodaten šum E, tako da v resnici računamo z matriko $B + E$ in dobimo

$$X_n = A_c^{-1}(B+E)A_r^{-1} = X + A_c^{-1} E A_r^{-1}.$$

Linearni model

$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$: originalna (jasna) slika

$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$: dejanska (zamegljena) slika

Preprost linearni model pravi, da je zameglitev vrstic neodvisna od zameglitve stolpcev. Tedaj obstajata obrnljivi matriki $A_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$ in $A_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je

$$A_c X A_r^T = B.$$

Če poznamo A_c in A_r, bi lahko izračunali $X = A_c^{-1} B A_r^{-1}$.

To se ne izkaže za dober pristop, saj v resnici slika B vsebuje še dodaten šum E, tako da v resnici računamo z matriko $B + E$ in dobimo

$$X_n = A_c^{-1}(B+E)A_r^{-1} = X + A_c^{-1} E A_r^{-1}.$$

Če uporabimo regularizacijo s TSVD, namesto A_c^{-1} in A_r^{-1} uporabimo $(A_c)_k^+$ in $(A_r)_k^+$, kjer sta $(A_c)_k$ in $(A_r)_k$ matriki ranga k, ki sta najbližji A_c in A_r.

Splošen linearni model

Iz stolpcev $X = [x_1 \ \cdots \ x_n]$ in $B = [b_1 \ \cdots \ b_n]$ sestavimo vektorja x in b iz $\mathbb{R}^{mn}$:

$$x = \mathrm{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \mathrm{vec}(B) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Splošen linearni model

Iz stolpcev $X = [x_1 \ \cdots \ x_n]$ in $B = [b_1 \ \cdots \ b_n]$ sestavimo vektorja x in b iz $\mathbb{R}^{mn}$:

$$x = \mathrm{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \mathrm{vec}(B) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Linearni model zamegljevanja pomeni, da je $Ax = b$.

Splošen linearni model

Iz stolpcev $X = [x_1 \ \cdots \ x_n]$ in $B = [b_1 \ \cdots \ b_n]$ sestavimo vektorja x in b iz $\mathbb{R}^{mn}$:

$$x = \mathrm{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \mathrm{vec}(B) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Linearni model zamegljevanja pomeni, da je $Ax = b$.

Potem dobimo $x_n = A^{-1}(b + e) = x + A^{-1}e$, kjer je $e = \mathrm{vec}(E)$ vektor šuma. Če uporabimo singularni razcep matrike A, dobimo

$$A^{-1}e = \sum_{i=1}^{mn} \frac{u_i^T e}{\sigma_i} v_i.$$

Splošen linearni model

Iz stolpcev $X = [x_1 \ \cdots \ x_n]$ in $B = [b_1 \ \cdots \ b_n]$ sestavimo vektorja x in b iz $\mathbb{R}^{mn}$:

$$x = \mathrm{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \mathrm{vec}(B) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Linearni model zamegljevanja pomeni, da je $Ax = b$.

Potem dobimo $x_n = A^{-1}(b + e) = x + A^{-1}e$, kjer je $e = \mathrm{vec}(E)$ vektor šuma. Če uporabimo singularni razcep matrike A, dobimo

$$A^{-1}e = \sum_{i=1}^{mn} \frac{u_i^T e}{\sigma_i} v_i.$$

Če iz stolpcev v_i sestavimo slike V_i, dobimo

$$X_n = B + \sum_{i=1}^{mn} \frac{u_i^T e}{\sigma_i} V_i.$$

Splošen linearni model

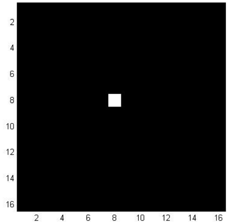
$$X_n = B + \sum_{i=1}^{mn} \frac{u_i^T e}{\sigma_i} V_i.$$

Za splošen linearni model zamegljevanja lahko predpostavimo:

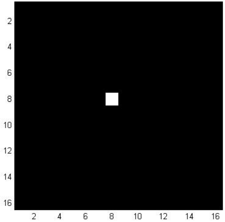
- Komponente šuma $|u_i^T e|$ so majhne in približno enakega velikostnega razreda za vse i,
- Singularne vrednosti matrike A padajo proti vrednosti zelo blizu 0, občutljivost $\kappa_2(A) = \sigma_1(A)/\sigma_{mn}(A)$ je zelo velika,
- Singularni vektorji, ki pripadajo manjšim singularnim vrednostim, predstavljajo visoko frekvenčne podatke (pri večjem i elementi vektorjev u_i in v_i vse bolj spreminjajo predznak).

Funkcija zamegljevanja (PSF - point spread function)

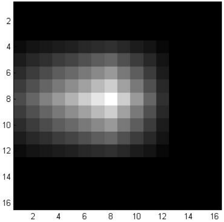
V linearnem modelu $Ax = b$ zameglitev i-tega piksla predstavlja i-ti stolpec matrike A. Če predpostavimo, da pri vseh točkah pride do enake vrste zamegljitve, potem zadošča vedeti, kaj se zgodi z eno točko:



V linearnem modelu $Ax = b$ zameglitev i-tega piksla predstavlja i-ti stolpec matrike A. Če predpostavimo, da pri vseh točkah pride do enake vrste zamegljitve, potem zadošča vedeti, kaj se zgodi z eno točko:



$\Longrightarrow$



Točka iz originala se razmaže v manjši madež. Pri predpostavki, da se vse točke razmažejo na isti način, lahko motnjo predstavimo z majhno matriko P. Ta se potem bločno ponavlja po matriki A.

Pri predpostavki, da se nič ne izgubi ali doda, mora biti vsota vseh elementov matrike P enaka 1.

Primeri PSF

Matriko P lahko dobimo eksperimentalno (npr. astronomi opazujejo sliko znane zvezde) ali analitično.

Primeri PSF

Matriko P lahko dobimo eksperimentalno (npr. astronomi opazujejo sliko znane zvezde) ali analitično.

Če gledamo sliko piksla x_{kl}, potem pri out-of-focus PSF dobimo

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/(\pi r^2) & za\ (i-k)^2 + (j-l)^2 \le r^2 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Pri atmosferskih motnjah dobimo dvodimenzionalno Gaussovo funkcijo z elementi

$$p_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i-k \\ j-l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_1^2 & \rho^2 \\ \rho^2 & s_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i-k \\ j-l \end{bmatrix}\right),$$

kjer parametri s_1, s_2, ρ določajo širino in smer motnje. V praksi ne vzamemo celotne matrike, ki je polna, temveč jo odrežemo in normiramo, da je vsota vseh elementov 1.

Robni pogoji

Na robovih slike nimamo dovolj podatkov, saj madeži točk blizu roba segajo čez rob. Za uspešno rekonstrukcijo moramo predpostaviti, kako naj bi se slika nadaljevala čez rob. To naredimo tako, da sliko pred obdelavo navidezno vključimo v večjo sliko, obdelamo večjo sliko in nato iz nje izrežemo sliko na začetnem mestu.

Robni pogoji

Na robovih slike nimamo dovolj podatkov, saj madeži točk blizu roba segajo čez rob. Za uspešno rekonstrukcijo moramo predpostaviti, kako naj bi se slika nadaljevala čez rob. To naredimo tako, da sliko pred obdelavo navidezno vključimo v večjo sliko, obdelamo večjo sliko in nato iz nje izrežemo sliko na začetnem mestu.

Če nič ne predpostavimo, je to ekvivalentno temu, da bi sliki dodali črn okvir, oziroma da bi delali z razširjeno sliko bločne oblike

$$X_{ext} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Robni pogoji

Na robovih slike nimamo dovolj podatkov, saj madeži točk blizu roba segajo čez rob. Za uspešno rekonstrukcijo moramo predpostaviti, kako naj bi se slika nadaljevala čez rob. To naredimo tako, da sliko pred obdelavo navidezno vključimo v večjo sliko, obdelamo večjo sliko in nato iz nje izrežemo sliko na začetnem mestu.

Če nič ne predpostavimo, je to ekvivalentno temu, da bi sliki dodali črn okvir, oziroma da bi delali z razširjeno sliko bločne oblike

$$X_{ext} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri periodičnem modelu se slika periodično ponavlja v vseh smereh. Ustreza mu razširjena matrika

$$X_{ext} = \begin{bmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{bmatrix}.$$

Zrcalni model

Pri zrcalnem modelu se slika na vseh robovih zrcalno nadaljuje. Temu ustreza razširjena matrika

$$X_{ext} = \begin{bmatrix} X_\times & X_{\mathrm{ud}} & X_\times \\ X_{\mathrm{lr}} & X & X_{\mathrm{lr}} \\ X_\times & X_{\mathrm{ud}} & X_\times \end{bmatrix},$$

kjer dodatne tri matrike dobimo kot

$$X_{\mathrm{lr}} = \texttt{fliplr}(X), \quad X_{\mathrm{ud}} = \texttt{flipud}(X), \quad X_\times = \texttt{fliplr}(X_{\mathrm{ud}}).$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad X_{ext} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 9 & 8 & 7 & 7 & 8 & 9 & 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 7 & 8 & 9 & 9 & 8 & 7 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Konvolucija

Delovanje PSF je v bistvu dvodimenzionalna konvolucija.
Če sta p in x zvezni funkciji, je v eni dimenziji njuna konvolucija definirana z

$$(x * p)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s-t)x(t)dt.$$

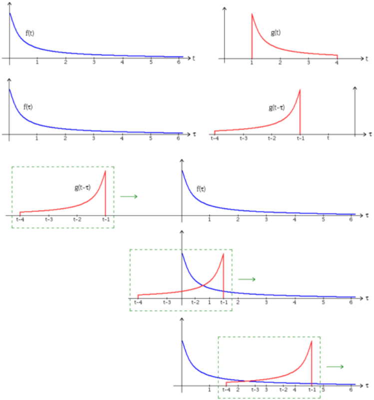
Vrednost $x * p$ v točki s je uteženo povprečje x z utežmi, ki jih predstavlja p.

Konvolucija

Delovanje PSF je v bistvu dvodimenzionalna konvolucija.
Če sta p in x zvezni funkciji, je v eni dimenziji njuna konvolucija definirana z

$$(x * p)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s-t)x(t)dt.$$

Vrednost $x * p$ v točki s je uteženo povprečje x z utežmi, ki jih predstavlja p.



Diskretna konvolucija

Naj bo slika vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$, PSF pa $p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{bmatrix}^T$.

Diskretna konvolucija

Naj bo slika vektor $x = \left[\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}\right]^T$, PSF pa $p = \left[\begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array}\right]^T$.
Sliko x razširimo v

$$x_{ext} = \left[\begin{array}{cc|ccccc|cc} w_1 & w_2 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 \end{array}\right]^T$$

in izračunamo elemente dobljene slike b kot

$$\begin{aligned}
b_1 &= p_5 w_1 + p_4 w_2 + p_3 x_1 + p_4 x_2 + p_1 x_3 \\
b_2 &= p_5 w_2 + p_4 x_1 + p_3 x_2 + p_4 x_3 + p_1 x_4 \\
b_3 &= p_5 x_1 + p_4 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + p_1 x_5 \\
b_4 &= p_5 x_2 + p_4 x_3 + p_3 x_4 + p_4 x_5 + p_1 y_1 \\
b_5 &= p_5 x_3 + p_4 x_4 + p_3 x_5 + p_4 y_1 + p_1 y_2
\end{aligned}$$

Diskretna konvolucija

Naj bo slika vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$, PSF pa $p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{bmatrix}^T$.
Sliko x razširimo v

$$x_{ext} = \left[\begin{array}{cc|ccccc|cc} w_1 & w_2 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 \end{array} \right]^T$$

in izračunamo elemente dobljene slike b kot

$$\begin{aligned}
b_1 &= p_5 w_1 + p_4 w_2 + p_3 x_1 + p_4 x_2 + p_1 x_3 \\
b_2 &= p_5 w_2 + p_4 x_1 + p_3 x_2 + p_4 x_3 + p_1 x_4 \\
b_3 &= p_5 x_1 + p_4 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + p_1 x_5 \\
b_4 &= p_5 x_2 + p_4 x_3 + p_3 x_4 + p_4 x_5 + p_1 y_1 \\
b_5 &= p_5 x_3 + p_4 x_4 + p_3 x_5 + p_4 y_1 + p_1 y_2
\end{aligned}$$

Vrednosti w_1, w_2, y_1, y_2 sledijo iz izbire robnih pogojev:

- črn okvir: $w_1 = w_2 = y_1 = y_2 = 0$

Diskretna konvolucija

Naj bo slika vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$, PSF pa $p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{bmatrix}^T$. Sliko x razširimo v

$$x_{ext} = \left[\begin{array}{cc|ccccc|cc} w_1 & w_2 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 \end{array} \right]^T$$

in izračunamo elemente dobljene slike b kot

$$\begin{aligned}
b_1 &= p_5 w_1 + p_4 w_2 + p_3 x_1 + p_4 x_2 + p_1 x_3 \\
b_2 &= p_5 w_2 + p_4 x_1 + p_3 x_2 + p_4 x_3 + p_1 x_4 \\
b_3 &= p_5 x_1 + p_4 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + p_1 x_5 \\
b_4 &= p_5 x_2 + p_4 x_3 + p_3 x_4 + p_4 x_5 + p_1 y_1 \\
b_5 &= p_5 x_3 + p_4 x_4 + p_3 x_5 + p_4 y_1 + p_1 y_2
\end{aligned}$$

Vrednosti w_1, w_2, y_1, y_2 sledijo iz izbire robnih pogojev:

- črn okvir: $w_1 = w_2 = y_1 = y_2 = 0$
- periodični model: $w_1 = x_4$, $w_2 = x_5$, $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$

Diskretna konvolucija

Naj bo slika vektor $x = \left[\; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \;\right]^T$, PSF pa $p = \left[\; p_1 \; p_2 \; p_3 \; p_4 \; p_5 \;\right]^T$. Sliko x razširimo v

$$x_{ext} = \left[\; w_1 \; w_2 \;\middle|\; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \;\middle|\; y_1 \; y_2 \;\right]^T$$

in izračunamo elemente dobljene slike b kot

$$\begin{aligned}
b_1 &= p_5 w_1 + p_4 w_2 + p_3 x_1 + p_4 x_2 + p_1 x_3 \\
b_2 &= p_5 w_2 + p_4 x_1 + p_3 x_2 + p_4 x_3 + p_1 x_4 \\
b_3 &= p_5 x_1 + p_4 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + p_1 x_5 \\
b_4 &= p_5 x_2 + p_4 x_3 + p_3 x_4 + p_4 x_5 + p_1 y_1 \\
b_5 &= p_5 x_3 + p_4 x_4 + p_3 x_5 + p_4 y_1 + p_1 y_2
\end{aligned}$$

Vrednosti w_1, w_2, y_1, y_2 sledijo iz izbire robnih pogojev:

- črn okvir: $w_1 = w_2 = y_1 = y_2 = 0$
- periodični model: $w_1 = x_4$, $w_2 = x_5$, $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$
- zrcalni model: $w_1 = x_2$, $w_2 = x_1$, $y_1 = x_5$, $y_2 = x_4$

Strukturirane matrike

Črn okvir pripelje do Toeplitzove matrike:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & & \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ & & p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Strukturirane matrike

Črn okvir pripelje do Toeplitzove matrike:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & & \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ & & p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Periodičnemu modelu ustreza krožna matrika:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & p_5 & p_4 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_5 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Strukturirane matrike

Črn okvir pripelje do Toeplitzove matrike:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & & \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ & & p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Periodičnemu modelu ustreza krožna matrika:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & p_5 & p_4 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_5 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Zrcalnemu modelu ustreza Toeplitz-plus-Hankelova matrika:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 + p_4 & p_2 + p_5 & p_1 & & \\ p_4 + p_5 & p_3 & p_2 & p_1 & \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 + p_1 \\ & & p_5 & p_4 + p_1 & p_3 + p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Dvodimenzionalna konvolucija

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

kjer je p_{22} središče PSF matrike.

Dvodimenzionalna konvolucija

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

kjer je p_{22} središče PSF matrike.Za element b_{22} potem velja

$$\begin{aligned} b_{22} &= p_{33} \cdot x_{11} + p_{32} \cdot x_{12} + p_{31} \cdot x_{13} \\ &+ p_{23} \cdot x_{21} + p_{22} \cdot x_{22} + p_{21} \cdot x_{23} \\ &+ p_{13} \cdot x_{31} + p_{12} \cdot x_{32} + p_{11} \cdot x_{33}, \end{aligned}$$

ostale enačbe pa so odvisne od robnih pogojev.

Dvodimenzionalna konvolucija

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

kjer je p_{22} središče PSF matrike.Za element b_{22} potem velja

$$\begin{aligned} b_{22} &= p_{33} \cdot x_{11} + p_{32} \cdot x_{12} + p_{31} \cdot x_{13} \\ &+ p_{23} \cdot x_{21} + p_{22} \cdot x_{22} + p_{21} \cdot x_{23} \\ &+ p_{13} \cdot x_{31} + p_{12} \cdot x_{32} + p_{11} \cdot x_{33}, \end{aligned}$$

ostale enačbe pa so odvisne od robnih pogojev. Pri črnem okvirju za b_{21} dobimo

$$\begin{aligned} b_{21} &= p_{33} \cdot 0 + p_{32} \cdot x_{11} + p_{31} \cdot x_{12} \\ &+ p_{23} \cdot 0 + p_{22} \cdot x_{21} + p_{21} \cdot x_{22} \\ &+ p_{13} \cdot 0 + p_{12} \cdot x_{31} + p_{11} \cdot x_{32}. \end{aligned}$$

Bločne Toeplitzove matrike s Toeplitzovimi bloki (BTTB)

Pri črnem robu dobimo

$$
\begin{bmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\\ b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\\ b_{13}\\ b_{23}\\ b_{33} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
p_{22} & p_{12} & & p_{21} & p_{11} & & & & \\
p_{32} & p_{22} & p_{12} & p_{31} & p_{21} & p_{11} & & & \\
 & p_{32} & p_{22} & & p_{31} & p_{21} & & & \\
\hline
p_{23} & p_{13} & & p_{22} & p_{12} & & p_{21} & p_{11} & \\
p_{33} & p_{23} & p_{13} & p_{32} & p_{22} & p_{12} & p_{31} & p_{21} & p_{11} \\
 & p_{33} & p_{23} & & p_{32} & p_{22} & & p_{31} & p_{21} \\
\hline
 & & & p_{23} & p_{13} & & p_{22} & p_{12} & \\
 & & & p_{33} & p_{23} & p_{13} & p_{32} & p_{22} & p_{12} \\
 & & & & p_{33} & p_{23} & & p_{32} & p_{22}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\\ x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\\ x_{13}\\ x_{23}\\ x_{33} \end{bmatrix}.
$$

Bločne Toeplitzove matrike s Toeplitzovimi bloki (BTTB)

Pri črnem robu dobimo

$$\begin{bmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\\ b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\\ b_{13}\\ b_{23}\\ b_{33}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
p_{22} & p_{12} & & p_{21} & p_{11} & & & & \\
p_{32} & p_{22} & p_{12} & p_{31} & p_{21} & p_{11} & & & \\
 & p_{32} & p_{22} & & p_{31} & p_{21} & & & \\ \hline
p_{23} & p_{13} & & p_{22} & p_{12} & & p_{21} & p_{11} & \\
p_{33} & p_{23} & p_{13} & p_{32} & p_{22} & p_{12} & p_{31} & p_{21} & p_{11} \\
 & p_{33} & p_{23} & & p_{32} & p_{22} & & p_{31} & p_{21} \\ \hline
 & & & p_{23} & p_{13} & & p_{22} & p_{12} & \\
 & & & p_{33} & p_{23} & p_{13} & p_{32} & p_{22} & p_{12} \\
 & & & & p_{33} & p_{23} & & p_{32} & p_{22}
\end{array}\right] \begin{bmatrix} x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\\ x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\\ x_{13}\\ x_{23}\\ x_{33}\end{bmatrix}.$$

Podobno pri periodičnem modelu dobimo BCCB (bločno krožno matriko s krožnimi matrikami), pri zrcalnem modelu pa matrike, ki so vsota matrik oblike BTTB, BTHB, BHTB, BHHB. (H = Hankel, T = Toeplitz).

Razcepno dvodimenzionalno zamegljevanje

Za matriko P pravimo, da je razcepna, če obstaja vektorja c in r, da je $P = cr^T$. Potem (za primer 3×3 z črnim robom) ima matrika A obliko

$$
A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
c_2 r_2 & c_1 r_2 & & c_2 r_1 & c_1 r_1 & & & & \\
c_3 r_2 & c_2 r_2 & c_1 r_2 & c_3 r_1 & c_2 r_1 & c_1 r_1 & & & \\
 & c_3 r_2 & c_2 r_2 & & c_3 r_1 & c_2 r_1 & & & \\
\hline
c_2 r_3 & c_1 r_3 & & c_2 r_2 & c_1 r_2 & & c_2 r_1 & c_1 r_1 & \\
c_3 r_3 & c_2 r_3 & c_1 r_3 & c_3 r_2 & c_2 r_2 & c_1 r_2 & c_3 r_1 & c_2 r_1 & c_1 r_1 \\
 & c_3 r_3 & c_2 r_3 & & c_3 r_2 & c_2 r_2 & & c_3 r_1 & c_2 r_1 \\
\hline
 & & & c_2 r_3 & c_1 r_3 & & c_2 r_2 & c_1 r_2 & \\
 & & & c_3 r_3 & c_2 r_3 & c_1 r_3 & c_3 r_2 & c_2 r_2 & c_1 r_2 \\
 & & & & c_3 r_3 & c_2 r_3 & & c_3 r_2 & c_2 r_2
\end{array}\right]
$$

Razcepno dvodimenzionalno zamegljevanje

Za matriko P pravimo, da je razcepna, če obstaja vektorja c in r, da je $P = cr^T$. Potem (za primer 3×3 z črnim robom) ima matrika A obliko

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
c_2r_2 & c_1r_2 & & c_2r_1 & c_1r_1 & & & & \\
c_3r_2 & c_2r_2 & c_1r_2 & c_3r_1 & c_2r_1 & c_1r_1 & & & \\
 & c_3r_2 & c_2r_2 & & c_3r_1 & c_2r_1 & & & \\
\hline
c_2r_3 & c_1r_3 & & c_2r_2 & c_1r_2 & & c_2r_1 & c_1r_1 & \\
c_3r_3 & c_2r_3 & c_1r_3 & c_3r_2 & c_2r_2 & c_1r_2 & c_3r_1 & c_2r_1 & c_1r_1 \\
 & c_3r_3 & c_2r_3 & & c_3r_2 & c_2r_2 & & c_3r_1 & c_2r_1 \\
\hline
 & & & c_2r_3 & c_1r_3 & & c_2r_2 & c_1r_2 & \\
 & & & c_3r_3 & c_2r_3 & c_1r_3 & c_3r_2 & c_2r_2 & c_1r_2 \\
 & & & & c_3r_3 & c_2r_3 & & c_3r_2 & c_2r_2
\end{array}\right] = \begin{bmatrix} r_2 & r_1 & \\ r_3 & r_2 & r_1 \\ & r_3 & r_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_2 & c_1 & \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ & c_3 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Kroneckerjev produkt

Denimo, da je A Kroneckerjev ali tenzorski produkt matrik A_r in A_c, kjer je

$$A_r = \begin{bmatrix} r_2 & r_1 & \\ r_3 & r_2 & r_1 \\ & r_3 & r_2 \end{bmatrix}, \qquad A_c = \begin{bmatrix} c_2 & c_1 & \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ & c_3 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Za Kroneckerjev produkt velja:

- $(A_r \otimes A_c) vec(X) = vec(A_c X A_r^T)$,
- $(A_r \otimes A_c)^T = A_r^T \otimes A_c^T$,
- $(A_r \otimes A_c)^{-1} = A_r^{-1} \otimes A_c^{-1}$,
- $(U_r \Sigma_r V_r^T) \otimes (U_c \Sigma_c V_c^T) = (U_r \otimes U_c)(\Sigma_r \otimes \Sigma_c)(V_r \otimes V_c)^T$.

Uporaba filtra preko konvolucije

Podobno kot naj bi dvodimenzionalna konvolucija zameglila našo sliko, lahko konvoulcije uporabimo za filtre slik.
Ostranjevanje šuma se npr. lahko požene kot konvolucija z eno izmed matrik, ki predstavljajo nizkofrekvenčni filter.

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Razpoznavanje robov se požene kot konvolucija z eno izmed matrik, ki predstavljajo visokofrekvenčni filter.

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 8 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Diskretna (hitra) Fourierova transformacija

Za $\omega = e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ n-ti primitivni koren enote v $\mathbb{C}$, definiramo unitarno Fourierovo matriko

$$F^H = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Diskretna (hitra) Fourierova transformacija

Za $\omega = e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ n-ti primitivni koren enote v $\mathbb{C}$, definiramo unitarno Fourierovo matriko

$$F^H = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Vsak polinom $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$, je natanko določen:

1. s koeficienti: $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T$.
2. z vrednostmi v n različnih točkah $z_0, \ldots, z_{n-1}$: $v = (p(z_0), \ldots, p(z_{n-1}))^T$.

Diskretna (hitra) Fourierova transformacija

Za $\omega = e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ n-ti primitivni koren enote v $\mathbb{C}$, definiramo unitarno Fourierovo matriko

$$F^H = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Vsak polinom $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}$, je natanko določen:

1. s koeficienti: $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T$.
2. z vrednostmi v n različnih točkah $z_0, \ldots, z_{n-1}$: $v = (p(z_0), \ldots, p(z_{n-1}))^T$.

Če za točke $z_0, \ldots, z_{n-1}$ izberemo $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ imamo:

$$\begin{bmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(\omega^{n-1}) \end{bmatrix} = \sqrt{n}F^H \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{in obratno} \qquad \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} F \begin{bmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(\omega^{n-1}) \end{bmatrix}.$$

To lahko zapišemo tudi kot :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{n}F^H a = DFT(a) \\ a &= \frac{1}{\sqrt{n}} F v = IDFT(v). \end{aligned}$$

Diskretna (hitra) Fourierova transformacija

Za $\omega = e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ n-ti primitivni koren enote v $\mathbb{C}$, definiramo unitarno Fourierovo matriko

$$F^H = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Vsak polinom $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}$, je natanko določen:

1. s koeficienti: $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T$.
2. z vrednostmi v n različnih točkah $z_0, \ldots, z_{n-1}$: $v = (p(z_0), \ldots, p(z_{n-1}))^T$.

Če za točke $z_0, \ldots, z_{n-1}$ izberemo $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ imamo:

$$\begin{bmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(\omega^{n-1}) \end{bmatrix} = \sqrt{n}F^H \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{in obratno} \qquad \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} F \begin{bmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(\omega^{n-1}) \end{bmatrix}.$$

To lahko zapišemo tudi kot :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{n}F^H a = DFT(a) \\ a &= \frac{1}{\sqrt{n}} F v = IDFT(v). \end{aligned}$$

V primeru $n = 2^k$ operaciji izvedemo v $\mathcal{O}(n \log n)$ in ju označimo s FFT in IFFT.

Hitre operacije s krožnimi matrikami

Vsaka krožna matrika je določena s prvo vrstico, npr.

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_4 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_0 \end{bmatrix} = \mathrm{circ}(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4).$$

Izkaže se, da se da vsako krožno matriko diagonalizirati s Fourierovo matriko, lastne vrednosti pa so vrednosti polinoma $p(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1}$ v točkah $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$.

Velja $C = F^H \Lambda F$, kjer je $\Lambda = \mathrm{diag}(p(1), \ldots, p(\omega^{n-1}) = \mathrm{diag}(FFT(c))$.

Tako lahko s krožno matriko množimo vektor ali pa rešimo sistem v $\mathcal{O}(n \log n)$.

Hitre operacije s krožnimi matrikami

Vsaka krožna matrika je določena s prvo vrstico, npr.

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_4 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_0 \end{bmatrix} = \mathrm{circ}(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4).$$

Izkaže se, da se da vsako krožno matriko diagonalizirati s Fourierovo matriko, lastne vrednosti pa so vrednosti polinoma $p(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1}$ v točkah $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$.

Velja $C = F^H \Lambda F$, kjer je $\Lambda = \mathrm{diag}(p(1), \ldots, p(\omega^{n-1}) = \mathrm{diag}(FFT(c))$.

Tako lahko s krožno matriko množimo vektor ali pa rešimo sistem v $\mathcal{O}(n \log n)$.

Za produkt $y = Cx$ tako velja $y = F^H \Lambda F x = FFT(FFT(c) \odot IFFT(x))$.

Najbolj znana testna slika za primerjavo algoritmov je...

Najbolj znana testna slika za primerjavo algoritmov je...

Lena