9. Nelinearni problemi lastnih vrednosti

Bor Plestenjak

NLA

18. april 2010

Nelinearni problem lastnih vrednosti (NEP)

Naj bo $T(\lambda)$ matrika $n \times n$, katere elementi so gladke funkcije parametra λ. Če je

$$T(\lambda)x = 0,$$

za $x \neq 0$, potem je λ lastna vrednost, x pa (desni) lastni vektor.

Če je $\det(T(\lambda)) \not\equiv 0$ je problem regularen in so lastne vrednosti rešitve karakteristične enačbe $\det(T(\lambda)) = 0$.

Posebni primeri:

- Navadni linearni problem l.v. (EP): $T(\lambda) = \lambda I - A$.
- Posplošeni problem l.v. (GEP): $T(\lambda) = \lambda B - A$.
- Kvadratni problem l.v. (QEP): $T(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$.
  Če je M nesingularna, ima QEP $2n$ lastnih vrednosti. QEP lahko prevedemo na GEP velikosti $2n \times 2n$ (temu pravimo linearizacija).
- Polinomski problem l.v. (PEP): $T(\lambda) = \lambda^m A_m + \cdots + \lambda A_1 + A_0$.
  Če je A_m nesingularna, ima PEP mn lastnih vrednosti. PEP lahko prevedemo na GEP velikosti $mn \times mn$.

Primeri NEP

- Racionalni problem l.v. (REP), npr.:

$$T(\lambda) = -K + \lambda M + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} C_k.$$

  REP lahko prevedemo na PEP, če izraz spravimo na skupni imenovalec.
- Iracionalni problem l.v., npr.:

$$T(\lambda) = K - \lambda M + i \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\lambda - \sigma_k^2} W_k.$$

  Iracionalnega problema lastnih vrednosti ne moremo linearizirati.
- Pri študiju diferencialnih enačb s časovnimi zamiki nastopajo nelinearni problemi lastnih vrednosti oblike

$$T(\lambda) = -\lambda I + A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_j e^{-h_k \lambda},$$

  kjer so $h_1, \ldots, h_m$ pozitivni premiki, $A_0, \ldots, A_m$ pa so realne matrike.

Metoda inverzne iteracije za splošni NEP

Če izberemo vektor $v \in \mathbb{C}^n$ in dodamo k enačbi $T(\lambda)x = 0$ še pogoj $v^H x = 1$, lahko zapišemo NEP v obliki nelinearnega sistema

$$F(x, \lambda) := \begin{bmatrix} T(\lambda)x \\ v^H x - 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Uporabimo Newtonovo metodo. Če je (x_k, λ_k) približek za lastni par, potem naslednji približek (x_{k+1}, λ_{k+1}) dobimo iz

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} - JF(x_k, \lambda_k)^{-1} F(x_k, \lambda_k).$$

Tako pridemo do sistema

$$\begin{bmatrix} T(\lambda_k) & T'(\lambda_k)x_k \\ v^H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} - x_k \\ \lambda_{k+1} - \lambda_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T(\lambda_k)x_k \\ v^H x_k - 1 \end{bmatrix},$$

oziroma

$$\begin{aligned} T(\lambda_k)x_{k+1} &= -(\lambda_{k+1} - \lambda_k) T'(\lambda_k)x_k \\ v^H x_{k+1} &= 1. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= -(\lambda_{k+1}-\lambda_k)T(\lambda_k)^{-1}T'(\lambda_k)x_k \\
v^H x_{k+1} &= 1.
\end{aligned}
$$

Iz prve enačbe lahko določimo smer vektorja x_{k+1}. Potrebujemo še λ_{k+1}. Če definiramo $u_{k+1} := T(\lambda_k)^{-1}T'(\lambda_k)x_k$ in prvo enačbo pomnožimo z v^H, dobimo

$$
v^H x_{k+1} = -(\lambda_{k+1}-\lambda_k)v^H u_{k+1} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{v^H x_k}{v^H u_{k+1}}.
$$

Inverzna iteracija

izberi vektor v in tak začetni približek (λ_0, x_0) za lastni par, da je $v^H x_0 = 1$

$k = 0, 1, \ldots$

a) reši linearni sistem $T(\lambda_k)u_{k+1} = T'(\lambda_k)x_k$

b) $\lambda_{k+1} = \lambda_k - \dfrac{v^H x_k}{v^H u_{k+1}}$

c) $x_{k+1} = \frac{1}{v^H u_{k+1}} u_{k+1}$

Zaporedne linearne aproksimacije

Naj bo $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ dvakrat zvezno odvedljiva. Naj bo λ_k približek za lastno vrednost. Iščemo popravek $\Delta\lambda_k$ in vektor $x \neq 0$, da bo

$$T(\lambda_k - \Delta\lambda_k)x = 0.$$

Če zgornjo enačbo razvijemo v vrsto, dobimo

$$(T(\lambda_k) - \Delta\lambda_k T'(\lambda_k) + \mathcal{O}(|\Delta\lambda_k|^2))x = 0.$$

Če zanemarimo kvadratne člene, dobimo posplošeni problem lastnih vrednosti

$$T(\lambda_k)x = \Delta\lambda_k T'(\lambda_k)x$$

in za $\Delta\lambda_k$ vzamemo po absolutni vrednosti najmanjšo lastno vrednost.

Zaporedne linearne aproksimacije

izberi začetni približek λ_0 za lastno vrednost
$k = 0, 1, \ldots$
    za $\Delta\lambda_k$ vzemi absolutno najmanjšo lastno vrednost GEP $T(\lambda_k)x = \theta T'(\lambda_k)x$
    $\lambda_{k+1} = \lambda_k - \Delta\lambda_k$

(Polinomski) kvadratni problem lastnih vrednosti

Pri PEP rešujemo $P(\lambda)x = 0$, kjer je

$$P(\lambda) = \lambda^m A_m + \lambda^{m-1} A_{m-1} + \cdots + \lambda A_1 + A_0.$$

Če je PEP regularen, so ničle karakterističnega polinoma $g(\lambda) = \det(P(\lambda))$ končne lastne vrednosti PEP. Če jih je manj kot mn, jih do mn dopolnimo z neskončnimi lastnimi vrednostmi. Neskončne lastne vrednosti so ničelne lastne vrednosti vzvratnega polinoma

$$P_R(\lambda) := \lambda^m P(1/\lambda) = \lambda^m A_0 + \lambda^{m-1} A_1 + \cdots + A_m,$$

pojavijo pa se le, če je matrika A_m nesingularna.

Lastni vektorji niso nujno linearno neodvisni.

Ne obstaja posplošitev Schurove forme.

Poseben primer je QEP, kjer vzamemo $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$

Zgled QEP

Če vzamemo $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$, kjer so

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

potem je $\det Q(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1$ in problem je regularen. Lastni pari so

k	1	2	3	4	5	6
λ_k	$1/3$	$1/2$	1	i	$-i$	∞
x_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Pet lastnih vrednosti je končnih, ena pa neskončna. Opazimo, da je možno, da imata različni lastni vrednosti isti lastni vektor.

Linearizacija QEP

Dan je QEP $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$.

Standardni postopek za numerično reševanje QEP je linearizacija, kjer problem prevedemo na GEP reda $2n$. Možnih linearizacij je več, primer je

$$\begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},$$

kjer je N poljubna nesingularna matrika.
(λ, x) je lastni par QEP natanko tedaj, ko je $\left(\lambda, \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}\right)$ lastni par GEP.

Če je M nesingularna, potem lahko QEP prevedemo na EP z matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}.$$

Linearizacija PEP

Podobno lahko PEP $P(\lambda) = \lambda^m A_m + \cdots + \lambda A_1 + A_0$ lineariziramo kot GEP z matrikami velikosti $mn \times mn$.

Primer je t.i. prva spremljevalna forma, ki ima obliko

$$C_1(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -I \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

(λ, x) je lastni par PEP natanko tedaj, ko je $\left(\lambda, \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} x \end{bmatrix}\right)$ lastni par GEP.

Primeri hermitskih QEP

Dan je QEP $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$, kjer so M, K, C hermitske. Za poljuben $x \neq 0$ definiramo

$$m(x) = x^H M x, \quad k(x) = x^H K x, \quad c(x) = x^H C x.$$

Definicija

Dan je QEP $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$, kjer so M, K, C hermitske, M pa je pozitivno definitna. Problem Q je

- *hiperboličen: za vsak $x \neq 0$ velja $c(x)^2 > 4m(x)k(x)$,*
- *eliptičen: za vsak $x \neq 0$ velja $c(x)^2 < 4m(x)k(x)$,*
- *nadkritično dušen: hiperboličen in je C pozitivno, K pa nenegativno definitna.*

Če je x lastni vektor, je vsaj ena izmed rešitev kvadratne enačbe $x^H Q(\lambda) x = 0$ enaka lastni vrednosti, ki pripada x. Od tod sledi, da so vse lastne vrednosti hiperboličnega QEP realne, eliptičen QEP nima nobene realne lastne vrednosti, vse lastne vrednosti nadkritično dušenega QEP pa so negativne.

Hiperbolični QEP

Dan je QEP $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$, kjer so M, K, C hermitske, M je pozitivno definitna in za vsak $x \neq 0$ velja $c(x)^2 > 4m(x)k(x)$.

Vse lastne vrednosti so realne in zanje velja, da jih lahko uredimo, da velja

$$\lambda_{2n} \leq \cdots \leq \lambda_{n+1} < \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1.$$

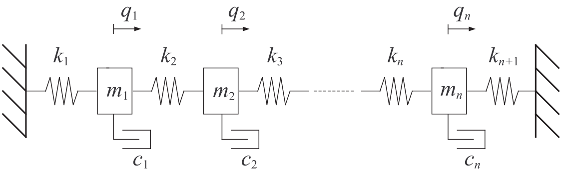
Definiramo lahko t.i. primarni in sekundarni Rayleighov funkcional

$$p_1(x) = \frac{-c(x) + d(x)}{2m(x)}, \qquad p_2(x) = \frac{-c(x) - d(x)}{2m(x)},$$

kjer je $d(x) = \sqrt{c(x)^2 - 4m(x)k(x)}$. Za vsak $x \neq 0$ velja $p_2(x) < p_1(x)$.

Lastni vektorji, ki pripadajo t.i. primarnim lastnim vrednostim $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so linearno neodvisni, enako velja za lastne vektorje, ki pripadajo sekundarnim lastnim vrednostim $\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{2n}$.

Zgled uporabe QEP



Nihanje dušenega sistema mas in vzmeti. Če predpostavimo $q_0 = q_{n+1} = 0$, potem iz Newtonovega zakona dobimo enačbe

$$m_i \ddot{q}_i(t) = -k_i \left(q_i(t) - q_{i-1}(t)\right) - k_{i+1}\left(q_i(t) - q_{i+1}(t)\right) - c_i \dot{q}_i(t),$$

$i = 1, \ldots, n$, iz katerih sestavimo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0,$$

$$M = \operatorname{diag}(m_1, \ldots, m_n), \qquad C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n), \qquad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k_n \\ & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}.$$

M je masna matrika, C matrika dušenja, K pa togostna matrika.

Rešitev homogene diferencialne enačbe

Če so vse lastne vrednosti QEP enostavne, ima splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0,$$

obliko

$$q(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k e^{\lambda_k t} x_k,$$

kjer so $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ konstante, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ so lastne vrednosti, $x_1, \ldots, x_{2n}$ pa lastni vektorji QEP

$$\lambda^2 Mx + \lambda Cx + Kx = 0.$$

Konstante $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ določimo iz začetnih odmikov $q(0)$ in hitrosti $\dot{q}(0)$.

d.e. je stabilna: $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ za vse k

d.e. je šibko stabilna: $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0$ za vse k, če je $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ je λ_k enostavna.

Vsiljeno nihanje

Imamo enačbo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t).$$

Če je desna stran oblike $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$, kar ustreza vsiljenemu nihanju, potem je partikularna rešitev

$$q_p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^H f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k,$$

kjer so $y_1, \ldots, y_{2n}$ levi lastni vektorji.

Če se $i\omega_0$ približa eni izmed lastnih vrednosti λ_k, se lahko pojavi resonanca.

Millenium bridge

Most so odprli 10.6.2000 za 18.2 milijonov funtov . . .

Millenium bridge

Most so odprli 10.6.2000 za 18.2 milijonov funtov . . . in ga zaprli 12.6.2000.

Millenium bridge

Ponovno so ga odprli 22.2.2002, potem ko so za konstrukcijo in vgradnjo sistema dušilcev porabili še 5 milijonov funtov.