8. Posplošeni problem lastnih vrednosti

Bor Plestenjak

NLA

13. april 2011

Matrični šop

Dani sta kvadratni $n \times n$ matriki A in B.

Definicija

Množico vseh matrik oblike $A - \lambda B$, kjer je $\lambda \in \mathbb{C}$, imenujemo matrični šop in označimo z (A, B) ali $A - \lambda B$.

Matrični šop

Dani sta kvadratni $n \times n$ matriki A in B.

Definicija

Množico vseh matrik oblike $A - \lambda B$, kjer je $\lambda \in \mathbb{C}$, imenujemo matrični šop in označimo z (A, B) ali $A - \lambda B$.

Karakteristični polinom matričnega šopa (A, B) je $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$. Če polinom p ni identično enak 0, je matrični šop regularen, sicer pa singularen.

Matrični šop

Dani sta kvadratni $n \times n$ matriki A in B.

Definicija

Množico vseh matrik oblike $A - \lambda B$, kjer je $\lambda \in \mathbb{C}$, imenujemo matrični šop in označimo z (A, B) ali $A - \lambda B$.

Karakteristični polinom matričnega šopa (A, B) je $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$. Če polinom p ni identično enak 0, je matrični šop regularen, sicer pa singularen.

Če je matrični šop (A, B) regularen in je

$$Ax = \lambda Bx$$

za $x \neq 0$, potem pravimo, da je λ (končna) lastna vrednost in x (desni) lastni vektor. Podobno je $y \neq 0$ levi lastni vektor za λ, če je $y^H A = \lambda y^H B$.

Matrični šop

Dani sta kvadratni $n \times n$ matriki A in B.

Definicija

Množico vseh matrik oblike $A - \lambda B$, kjer je $\lambda \in \mathbb{C}$, imenujemo matrični šop in označimo z (A, B) ali $A - \lambda B$.

Karakteristični polinom matričnega šopa (A, B) je $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$. Če polinom p ni identično enak 0, je matrični šop regularen, sicer pa singularen.

Če je matrični šop (A, B) regularen in je

$$Ax = \lambda Bx$$

za $x \neq 0$, potem pravimo, da je λ (končna) lastna vrednost in x (desni) lastni vektor. Podobno je $y \neq 0$ levi lastni vektor za λ, če je $y^H A = \lambda y^H B$.

Problemu iskanja lastnih vrednosti matričnega šopa pravimo posplošeni problem lastnih vrednosti (GEP).

Definiten primer

Dan je posplošen problem lastnih vrednosti $Ax = \lambda Bx$, kjer je A simetrična in B simetrična pozitivno definitna.

Če je B nesingularna, lahko sicer res rešujemo ekvivalenten navaden problem lastnih vrednosti $B^{-1}Ax = \lambda x$, a s tem izgubimo simetrično stukturo.

Definiten primer

Dan je posplošen problem lastnih vrednosti $Ax = \lambda Bx$, kjer je A simetrična in B simetrična pozitivno definitna.

Če je B nesingularna, lahko sicer res rešujemo ekvivalenten navaden problem lastnih vrednosti $B^{-1}Ax = \lambda x$, a s tem izgubimo simetrično stukturo.

Če uporabimo razcep Choleskega $B = VV^T$ matrike B, dobimo

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda VV^T x \\ V^{-1}Ax &= \lambda V^T x \\ V^{-1}AV^{-T}V^T x &= \lambda V^T x \end{aligned}$$

Definiten primer

Dan je posplošen problem lastnih vrednosti $Ax = \lambda Bx$, kjer je A simetrična in B simetrična pozitivno definitna.

Če je B nesingularna, lahko sicer res rešujemo ekvivalenten navaden problem lastnih vrednosti $B^{-1}Ax = \lambda x$, a s tem izgubimo simetrično stukturo.

Če uporabimo razcep Choleskega $B = VV^T$ matrike B, dobimo

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda VV^T x \\ V^{-1}Ax &= \lambda V^T x \\ V^{-1}AV^{-T} V^T x &= \lambda V^T x \end{aligned}$$

Simetričen problem lastnih vrednosti $Cy = \lambda y$ za $C = V^{-1}AV^{-T}$ in $y = V^T x$.

Definiten primer

Dan je posplošen problem lastnih vrednosti $Ax = \lambda Bx$, kjer je A simetrična in B simetrična pozitivno definitna.

Če je B nesingularna, lahko sicer res rešujemo ekvivalenten navaden problem lastnih vrednosti $B^{-1}Ax = \lambda x$, a s tem izgubimo simetrično stukturo.

Če uporabimo razcep Choleskega $B = VV^T$ matrike B, dobimo

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda VV^T x \\ V^{-1}Ax &= \lambda V^T x \\ V^{-1}AV^{-T}V^T x &= \lambda V^T x \end{aligned}$$

Simetričen problem lastnih vrednosti $Cy = \lambda y$ za $C = V^{-1}AV^{-T}$ in $y = V^T x$.

Posladica: v primeru $A = A^T$ in B s.p.d. ima šop (A, B) realne lastne vrednosti.

Splošen regularen matrični šop

Naj bo (A, B) regularen matrični šop. Potem:

- Končne lastne vrednosti šopa (A, B) so ničle karakterističnega polinoma $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$, ki je stopnje $m \leq n$.

Splošen regularen matrični šop

Naj bo (A, B) regularen matrični šop. Potem:

- Končne lastne vrednosti šopa (A, B) so ničle karakterističnega polinoma $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$, ki je stopnje $m \leq n$.
- V primeru $m < n$ ima šop še lastno vrednost ∞ z večkratnostjo $n - m$.

Splošen regularen matrični šop

Naj bo (A, B) regularen matrični šop. Potem:

- Končne lastne vrednosti šopa (A, B) so ničle karakterističnega polinoma $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$, ki je stopnje $m \leq n$.
- V primeru $m < n$ ima šop še lastno vrednost ∞ z večkratnostjo $n - m$.

Zgled

V primeru

$$A - \lambda B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

dobimo $p(\lambda) = (2\lambda - 1)\lambda$, torej so lastne vrednosti

$$\lambda_1 = 1/2, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \infty.$$

Splošen regularen matrični šop

Naj bo (A, B) regularen matrični šop. Potem:

- Končne lastne vrednosti šopa (A, B) so ničle karakterističnega polinoma $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$, ki je stopnje $m \leq n$.
- V primeru $m < n$ ima šop še lastno vrednost ∞ z večkratnostjo $n - m$.

Zgled

V primeru

$$A - \lambda B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

dobimo $p(\lambda) = (2\lambda - 1)\lambda$, torej so lastne vrednosti

$$\lambda_1 = 1/2, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \infty.$$

Neskončne lastne vrednosti se pojavijo natanko takrat, ko je matrika B singularna. Vsak vektor iz $\ker(B)$ je desni lastni vektor za lastno vrednost ∞.

Ekvivalentni matrični šopi

Izrek

Za regularen matrični šop (A, B) velja:

1) *Če je B nesingularna, so vse lastne vrednosti šopa (A, B) končne in enake lastnim vrednostim $B^{-1}A$ ali AB^{-1}.*
2) *Če je B singularna, ima šop (A, B) lastno vrednost ∞ z geometrijsko večkratnostjo $\dim(\ker(B))$.*
3) *Če je A nesingularna, so lastne vrednosti šopa (A, B) recipročne lastne vrednosti $A^{-1}B$ oziroma BA^{-1}, kjer lastna vrednost 0 ustreza neskončni lastni vrednosti (A, B).*

Ekvivalentni matrični šopi

Izrek

Za regularen matrični šop (A, B) velja:

1) *Če je B nesingularna, so vse lastne vrednosti šopa (A, B) končne in enake lastnim vrednostim $B^{-1}A$ ali AB^{-1}.*
2) *Če je B singularna, ima šop (A, B) lastno vrednost ∞ z geometrijsko večkratnostjo $\dim(\ker(B))$.*
3) *Če je A nesingularna, so lastne vrednosti šopa (A, B) recipročne lastne vrednosti $A^{-1}B$ oziroma BA^{-1}, kjer lastna vrednost 0 ustreza neskončni lastni vrednosti (A, B).*

Če sta matriki U in V nesingularni, sta šopa (A, B) in (UAV, UBV) ekvivalentna.

Izrek

Ekvivalentna regularna matrična šopa (A, B) in (UAV, UBV) imata enake lastne vrednosti. Velja:

- *x je lastni vektor za (A, B) $\Leftrightarrow$ $V^{-1}x$ je lastni vektor za (UAV, UBV),*
- *y je levi lastni vektor za (A, B) $\Leftrightarrow$ $U^{-H}y$ je levi lastni vektor za (UAV, UBV).*

Weierstrassova forma

Izrek

Za vsak regularen matrični šop $A - \lambda B$ obstajata nesingularni matriki U in V, da je

$$U(A - \lambda B)V = \mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1) - \lambda I_{n_1}, \ldots, J_{n_k}(\lambda_k) - \lambda I_{n_k}, N_{m_1}, \ldots, N_{m_k}),$$

kjer je

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \qquad N_{m_i} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Opazimo lahko, da je $N_{m_i} = I_{m_i} - \lambda J_{m_i}(0)$.

Weierstrassova forma je posplošitev Jordanove forme in je podobno neprimerna za numerično računanje.

Posplošena Schurova forma

Izrek

Za vsak regularen matrični šop $A - \lambda B$ obstajata unitarni matriki Q in Z, da je

$$Q^H(A - \lambda B)Z = S - \lambda T,$$

kjer sta matriki S in T zgoraj trikotni matriki.

Lastne vrednosti so potem kvocienti $\lambda_i = s_{ii}/t_{ii}$ za $t_{ii} \neq 0$ in ∞ v primeru $t_{ii} = 0$.

Posplošena Schurova forma

Izrek

Za vsak regularen matrični šop $A - \lambda B$ obstajata unitarni matriki Q in Z, da je

$$Q^H(A - \lambda B)Z = S - \lambda T,$$

kjer sta matriki S in T zgoraj trikotni matriki.

Lastne vrednosti so potem kvocienti $\lambda_i = s_{ii}/t_{ii}$ za $t_{ii} \neq 0$ in ∞ v primeru $t_{ii} = 0$.

Situacija $s_{ii} = t_{ii} = 0$ je možna le, če je šop (A, B) singularen.

Posplošena Schurova forma

Izrek

Za vsak regularen matrični šop $A - \lambda B$ obstajata unitarni matriki Q in Z, da je

$$Q^H(A - \lambda B)Z = S - \lambda T,$$

kjer sta matriki S in T zgoraj trikotni matriki.

Lastne vrednosti so potem kvocienti $\lambda_i = s_{ii}/t_{ii}$ za $t_{ii} \neq 0$ in ∞ v primeru $t_{ii} = 0$.

Situacija $s_{ii} = t_{ii} = 0$ je možna le, če je šop (A, B) singularen.

Če sta matriki A in B realni, potem obstaja realna posplošena Schurova forma, kjer sta matriki Q in Z ortogonalni, S je kvazi zgornja trikotna, T pa zgornja trikotna matrika.

Občutljivost lastnih vrednosti

Da lahko vključimo v analizo enakovredno še neskončne lastne vrednosti, uporabljamo ločno razdaljo, definirano kot

$$\chi(\alpha,\beta) = \frac{|\alpha-\beta|}{\sqrt{1+|\alpha|^2}\sqrt{1+|\beta|^2}}.$$

V limiti dobimo

$$\chi(\alpha,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}.$$

Občutljivost lastnih vrednosti

Da lahko vključimo v analizo enakovredno še neskončne lastne vrednosti, uporabljamo ločno razdaljo, definirano kot

$$\chi(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}\sqrt{1 + |\beta|^2}}.$$

V limiti dobimo

$$\chi(\alpha, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}}.$$

Izrek

Naj bo λ enostavna lastna vrednost šopa (A, B) z normiranim desnim lastnim vektorjem x in levim y. Če je $\widetilde{\lambda}$ ustrezna lastna vrednost zmotenega šopa $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$, kjer je $\|A - \widetilde{A}\|_2 \leq \epsilon$, $\|B - \widetilde{B}\|_2 \leq \epsilon$, potem je

$$\chi(\lambda, \widetilde{\lambda}) \leq \frac{\epsilon}{|y^H A x|^2 + |y^H B x|^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$PA = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$PB = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

a) matriko B s Householderjevimi zrcaljenji spravimo v zgornjo trikorno obliko

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{45}^T P A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{45}^T P B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{45}^T P A {\color{red}R_{45}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{45}^T P B {\color{red}R_{45}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}0} & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} {\color{red}R_{34}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} {\color{red}R_{34}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & {\color{red}0} & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} R_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} R_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} R_{34} {\color{red}R_{23}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} R_{34} {\color{red}R_{23}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & {\color{red}0} & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} R_{34} R_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} R_{34} R_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} R_{34} R_{23} {\color{red}R_{45}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} R_{34} R_{23} {\color{red}R_{45}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}0} & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} R_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} R_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{45}^T R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} R_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{45}^T R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} R_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$R_{45}^T R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P A R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} R_{34} \color{red}{R_{45}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$R_{45}^T R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} R_{34} \color{red}{R_{45}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & \times \end{bmatrix}$$

b) matriko A spravimo v zgornjo Hessenbergovo obliko z Givensovimi rotacijami in sproti popravljamo B

Predpriprava za QZ algoritem

Na začetku šop (A, B) z ortogonalnimi ekvivalentnimi tranformacijami reduciramo na obliko, ko je prva matrika zgornja Hessenbergova, druga pa zgornja trikotna.

$$\underbrace{R_{45}^T R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P}_{Q_1^T} A \underbrace{R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} R_{34} R_{45}}_{Z_1} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} = A_1$$

$$R_{45}^T R_{34}^T R_{45}^T R_{23}^T R_{34}^T R_{45}^T P B R_{45} R_{34} R_{23} R_{45} R_{34} R_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} = B_1$$

Časovna zahtevnost: $8n^3$ za izračun A_1 in B_1, še dodatnih $7n^3$ za izračun Q_1 in Z_1.

QZ algoritem

Izvajamo implicitno QR metodo na $C = AB^{-1}$, ki je zgornja Hessenbergova.

QZ algoritem

Izvajamo implicitno QR metodo na $C = AB^{-1}$, ki je zgornja Hessenbergova.

V enem koraku posodobimo $A_k - \lambda B_k$ v

$$A_{k+1} - \lambda B_{k+1} = Q_k^T (A_k - \lambda B_k) Z_k = Q_k^T A_k Z_k - \lambda Q_k^T B_k Z_k,$$

kjer Q_k in Z_k določimo tako, da

- je A_{k+1} zgornja Hessenbergova in B_{k+1} zgornja trikotna,
- se $A_{k+1} B_{k+1}^{-1}$ ujema z matriko, ki bi jo dobili z enim korakom QR iz $A_k B_k^{-1}$.

QZ algoritem

Izvajamo implicitno QR metodo na $C = AB^{-1}$, ki je zgornja Hessenbergova.

V enem koraku posodobimo $A_k - \lambda B_k$ v

$$A_{k+1} - \lambda B_{k+1} = Q_k^T (A_k - \lambda B_k) Z_k = Q_k^T A_k Z_k - \lambda Q_k^T B_k Z_k,$$

kjer Q_k in Z_k določimo tako, da

- je A_{k+1} zgornja Hessenbergova in B_{k+1} zgornja trikotna,
- se $A_{k+1} B_{k+1}^{-1}$ ujema z matriko, ki bi jo dobili z enim korakom QR iz $A_k B_k^{-1}$.

Velja $A_{k+1} B_{k+1}^{-1} = Q_k^T (A_k B_k^{-1}) Q_k$. Če je A_{k+1} zgornja Hessenbergova, B_{k+1} zgornja trikotna in se prvi stolpec Q_k ujema s prvim stolpcem ustrezne matrike pri QR iteraciji za $A_k B_k^{-1}$, nam izrek o implicitnem Q zagotavlja, da je to ekvivalentno metodi QR na AB^{-1}.

QZ algoritem

Izvajamo implicitno QR metodo na $C = AB^{-1}$, ki je zgornja Hessenbergova.

V enem koraku posodobimo $A_k - \lambda B_k$ v

$$A_{k+1} - \lambda B_{k+1} = Q_k^T (A_k - \lambda B_k) Z_k = Q_k^T A_k Z_k - \lambda Q_k^T B_k Z_k,$$

kjer Q_k in Z_k določimo tako, da

- je A_{k+1} zgornja Hessenbergova in B_{k+1} zgornja trikotna,
- se $A_{k+1} B_{k+1}^{-1}$ ujema z matriko, ki bi jo dobili z enim korakom QR iz $A_k B_k^{-1}$.

Velja $A_{k+1} B_{k+1}^{-1} = Q_k^T (A_k B_k^{-1}) Q_k$. Če je A_{k+1} zgornja Hessenbergova, B_{k+1} zgornja trikotna in se prvi stolpec Q_k ujema s prvim stolpcem ustrezne matrike pri QR iteraciji za $A_k B_k^{-1}$, nam izrek o implicitnem Q zagotavlja, da je to ekvivalentno metodi QR na AB^{-1}.

Za dvojni premik potrebujemo sled in determinanto 2×2 matrike $R = C(n-1:n, n-1:n)$, kar lahko izračunamo v $\mathcal{O}(1)$ operacij.

Preganjanje grbe

Naj bo v_1 prvi stolpec matrike $C^2 - \mathrm{sled}(R)C + \det(R)I$. Izračunamo ga lahko v $\mathcal{O}(1)$ operacij.

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Preganjanje grbe

Naj bo v_1 prvi stolpec matrike $C^2 - \text{sled}(R)C + \det(R)I$. Izračunamo ga lahko v $\mathcal{O}(1)$ operacij. Householderjevo zrcaljenje P_0, ki v_1 prezrcali v smer e_1 naredi grbo

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Preganjanje grbe

Naj bo v_1 prvi stolpec matrike $C^2 - \text{sled}(R)C + \det(R)I$. Izračunamo ga lahko v $\mathcal{O}(1)$ operacij. Householderjevo zrcaljenje P_0, ki v_1 prezrcali v smer e_1 naredi grbo

$$P_0 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$P_0 B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Preganjanje grbe

Naj bo v_1 prvi stolpec matrike $C^2 - \mathrm{sled}(R)C + \det(R)I$. Izračunamo ga lahko v $\mathcal{O}(1)$ operacij. Householderjevo zrcaljenje P_0, ki v_1 prezrcali v smer e_1 naredi grbo

$$P_0 A {\color{red}Z_1} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$P_0 B {\color{red}Z_1} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Grbo z zrcaljenji z leve in desne premaknemo naprej.

Preganjanje grbe

Naj bo v_1 prvi stolpec matrike $C^2 - \text{sled}(R)C + \det(R)I$. Izračunamo ga lahko v $\mathcal{O}(1)$ operacij. Householderjevo zrcaljenje P_0, ki v_1 prezrcali v smer e_1 naredi grbo

$$P_0 A Z_1 Z_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$P_0 B Z_1 Z_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Grbo z zrcaljenji z leve in desne premaknemo naprej.

Preganjanje grbe

Naj bo v_1 prvi stolpec matrike $C^2 - \text{sled}(R)C + \det(R)I$. Izračunamo ga lahko v $\mathcal{O}(1)$ operacij. Householderjevo zrcaljenje P_0, ki v_1 prezrcali v smer e_1 naredi grbo

$$P_1 P_0 A Z_1 Z_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$P_1 P_0 B Z_1 Z_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Grbo z zrcaljenji z leve in desne premaknemo naprej.

Deflacija

V primeru, ko je $a_{k+1,k} = 0$ oziroma $b_{kk} = 0$, lahko izvedemo deflacijo in nadaljujemo z matriko manjše velikosti.

Deflacija

V primeru, ko je $a_{k+1,k} = 0$ oziroma $b_{kk} = 0$, lahko izvedemo deflacijo in nadaljujemo z matriko manjše velikosti.

Pri situaciji $a_{k+1,k} = 0$ problem preprosto razdelimo na dva manjša posplošena problema lastnih vrednosti velikosti $k \times k$ in $(n-k) \times (n-k)$.

Deflacija

V primeru, ko je $a_{k+1,k} = 0$ oziroma $b_{kk} = 0$, lahko izvedemo deflacijo in nadaljujemo z matriko manjše velikosti.

Pri situaciji $a_{k+1,k} = 0$ problem preprosto razdelimo na dva manjša posplošena problema lastnih vrednosti velikosti $k \times k$ in $(n-k) \times (n-k)$.

V primeru $b_{kk} = 0$ pa z ustreznimi ortogonalnimi transformacijami pridemo do $a_{n,n-1} = 0$, $b_{nn} = 0$, potem pa lahko nadaljujejemo samo z vodilno podmatriko velikosti $(n-1) \times (n-1)$. V tem primeru izločimo lastno vrednost ∞.

Inverzna iteracija

Naj bo σ izračunana lastna vrednost šopa (A, B). Do lastnega vektorja lahko pridemo s posplošitvijo inverzne iteracije:

Inverzna iteracija za GEP

izberi začetni vektor q_0

$k = 1, 2, \ldots$

  reši $(A - \sigma B)z_k = Bq_{k-1}$

  $q_k = z_k / \|z_k\|$

Inverzna iteracija

Naj bo σ izračunana lastna vrednost šopa (A, B). Do lastnega vektorja lahko pridemo s posplošitvijo inverzne iteracije:

Inverzna iteracija za GEP

izberi začetni vektor q_0
$k = 1, 2, \ldots$
    reši $(A - \sigma B)z_k = Bq_{k-1}$
    $q_k = z_k / \|z_k\|$

V primeru, ko je B nesingularna, je to ekvivalentno inverzni iteraciji za $B^{-1}A$.

Posplošitev Rayleighovega kvocienta

Za $Ax = \lambda Bx$, kjer je $A = A^T$ in B s.p.d., definiramo

$$\rho(x, A, B) = \frac{x^T A x}{x^T B x}.$$

Podobno kot za simetričen problem velja $\lambda_n \leq \rho(x, A, B) \leq \lambda_1$.

Posplošitev Rayleighovega kvocienta

Za $Ax = \lambda Bx$, kjer je $A = A^T$ in B s.p.d., definiramo

$$\rho(x, A, B) = \frac{x^T A x}{x^T B x}.$$

Podobno kot za simetričen problem velja $\lambda_n \leq \rho(x, A, B) \leq \lambda_1$.

Lema

Posplošeni Rayleighov kvocient $\rho(x, A, B)$ vrne skalar λ, ki minimizira

$$\|Ax - \lambda Bx\|_{B^{-1}}, \qquad \text{kjer je } \|z\|_{B^{-1}}^2 = z^T B^{-1} z.$$

Posplošitev Rayleighovega kvocienta

Za $Ax = \lambda Bx$, kjer je $A = A^T$ in B s.p.d., definiramo

$$\rho(x, A, B) = \frac{x^T Ax}{x^T Bx}.$$

Podobno kot za simetričen problem velja $\lambda_n \leq \rho(x, A, B) \leq \lambda_1$.

Lema

Posplošeni Rayleighov kvocient $\rho(x, A, B)$ vrne skalar λ, ki minimizira

$$\|Ax - \lambda Bx\|_{B^{-1}}, \qquad \text{kjer je } \|z\|_{B^{-1}}^2 = z^T B^{-1} z.$$

Posplošena Rayleighova iteracija

izberi $x_0 \neq 0$
$k = 0, 1, \ldots$
    $\rho_k = \frac{x_k^T Ax_k}{x_k^T Bx_k}$
    reši $(A - \rho_k B)y_{k+1} = Bx_k$
    $x_{k+1} = y_{k+1}/\|y_{k+1}\|$

Singularni šopi

V primeru, ko je $\det(A - \lambda B) \equiv 0$, je šop singularen. Sedaj pravimo, da je μ lastna vrednost šopa, če velja

$$\operatorname{rang}(A - \mu B) < \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{rang}(A - \lambda B).$$

To pomeni, da pri lastnih vrednostih pade rang šopa. Ta definicija je dobra tudi za regularen primer, saj tam pri lastnih vrednostih matrika $A - \lambda B$ ni polnega ranga, sicer pa je.

Singularni šopi

V primeru, ko je $\det(A - \lambda B) \equiv 0$, je šop singularen. Sedaj pravimo, da je μ lastna vrednost šopa, če velja

$$\operatorname{rang}(A - \mu B) < \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{rang}(A - \lambda B).$$

To pomeni, da pri lastnih vrednostih pade rang šopa. Ta definicija je dobra tudi za regularen primer, saj tam pri lastnih vrednostih matrika $A - \lambda B$ ni polnega ranga, sicer pa je.

Zgled

Šop $A - \lambda B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je singularen. Edina lastna vrednost je $\lambda = 1$.

Singularni šopi

V primeru, ko je $\det(A - \lambda B) \equiv 0$, je šop singularen. Sedaj pravimo, da je μ lastna vrednost šopa, če velja

$$\mathrm{rang}(A - \mu B) < \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathrm{rang}(A - \lambda B).$$

To pomeni, da pri lastnih vrednostih pade rang šopa. Ta definicija je dobra tudi za regularen primer, saj tam pri lastnih vrednostih matrika $A - \lambda B$ ni polnega ranga, sicer pa je.

Zgled

Šop $A - \lambda B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je singularen. Edina lastna vrednost je $\lambda = 1$.

Tako lahko definiramo lastne vrednosti tudi za šope pravokotnih matrik.