3. Simetrični problem lastnih vrednosti

Bor Plestenjak

NLA

8. marec 2010

Lastne vrednosti

Naj bo A simetrična matrika. Velja:

- vse lastne vrednosti so realne,
- Schurova forma je diagonalna matrika,
- lastne vrednosti lahko uredimo po velikosti, da velja

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \cdots \leq \lambda_1,$$

- pripadajoče lastne vektorje $x_1, \ldots, x_n$ lahko izberemo tako, da tvorijo ortonormirano bazo,
- $\|A\|_2 = \max(|\lambda_1|, |\lambda_n|)$.

Rayleighov kvocient

Pri simetričnih matrikah je dovolj obravnavati *Rayleighov kvocient* le za realne vektorje. Za $x \neq 0$ je

$$\rho(x, A) = \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Že od prej poznamo lastnosti:

- Za $\alpha \neq 0$ je $\rho(x, A) = \rho(\alpha x, A)$.
- Za lastni vektor x_i je $\rho(x_i, A) = \lambda_i$.
- Če je x približek za lastni vektor, je $\rho(x, A)$ najboljša aproksimacija za lastno vrednost v smislu, da je $\min_{\sigma \in \mathbb{R}} \|Ax - \sigma x\|_2$ dosežen pri $\sigma = \rho(x, A)$.

Za simetrične matrike velja še naslednja lastnost.

Lema

Če je A simetrična matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1$, potem za vsak $x \neq 0$ velja

$$\lambda_n \leq \rho(x, A) \leq \lambda_1.$$

Minimaks izrek

Očitno je

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max_{x\neq 0} \rho(A,x), \\ \lambda_n &= \min_{x\neq 0} \rho(A,x). \end{aligned}$$

Podobno lahko izrazimo tudi vse preostale lastne vrednosti. Rezultat je temelj za številne pomembne teoretične rezultate.

Izrek (Courant–Fischerjev minimaks izrek)

Če je A simetrična matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1$, potem za $i = 1,\ldots,n$ velja

$$\lambda_i = \min_{\substack{S\subset\mathbb{R}^n \\ \dim(S)=n-i+1}} \max_{\substack{x\in S \\ x\neq 0}} \rho(x,A) = \max_{\substack{R\subset\mathbb{R}^n \\ \dim(R)=i}} \min_{\substack{x\in R \\ x\neq 0}} \rho(x,A).$$

Weylov izrek

Naj bodo $\lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1$ lastne vrednosti simetrične matrike A in $\widehat{\lambda}_n \leq \cdots \leq \widehat{\lambda}_1$ lastne vrednosti simetrične matrike $A + E$.

Posledica

Za $i = 1, \ldots, n$ velja $\quad \lambda_i + \lambda_n(E) \leq \widehat{\lambda}_i \leq \lambda_i + \lambda_1(E).$

Posledica (Weyl)

Za $i = 1, \ldots, n$ velja $\quad |\lambda_i - \widehat{\lambda}_i| \leq \|E\|_2.$

Izrek (Wielandt-Hoffman)

Velja

$$\sum_{i=1}^{n} (\widehat{\lambda}_i - \lambda_i)^2 \leq \|E\|_F^2.$$

Prepletanje lastnih vrednosti

Izrek (Cauchyjev izrek o prepletanju)

Če je A simetrična matrika in je A_r njena vodilna podmatrika velikosti $r \times r$ za $r = 1, \ldots, n-1$, potem velja

$$\lambda_{r+1}(A_{r+1}) \leq \lambda_r(A_r) \leq \lambda_r(A_{r+1}) \leq \cdots \leq \lambda_2(A_{r+1}) \leq \lambda_1(A_r) \leq \lambda_1(A_{r+1}).$$

Sylvestrov izrek o inerciji

Definicija

Če je X nesingularna, potem sta matriki A in $X^T AX$ kongruentni.

Definicija

Inercija simetrične matrike A je trojica (ν, ζ, π), kjer je ν število negativnih, ζ število ničelnih in π število pozitivnih lastnih vrednosti matrike A.

Izrek (Sylvester)

Če je A simetrična matrika, potem ima za vsako nesingularno matriko X matrika $X^T AX$ enako inercijo kot matrika A.

Relativni Weylov izrek

Izrek

Naj bo A simetrična matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1$ *in naj bodo* $\widehat{\lambda}_n \leq \cdots \leq \widehat{\lambda}_1$ *lastne vrednosti matrike* $X^T AX$. *Potem za* $i = 1, \ldots, n$ *velja*

$$|\widehat{\lambda}_i - \lambda_i| \leq |\lambda_i|\epsilon,$$

kjer je $\epsilon = \|X^T X - I\|_2$.