Skripta vaj iz NLA 2012/2013

Andrej Muhič

30. maj 2013

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$), $m \geq n$, matrika ranga r. Potem zanjo obstaja singularni razcep:

$$A = U\Sigma V^* = {}_m \overset{m}{\begin{bmatrix} U \end{bmatrix}} \begin{array}{c} n \\ m-n \end{array} \overset{n}{\begin{bmatrix} \Sigma_n \\ 0 \end{bmatrix}} {}_n \overset{n}{\begin{bmatrix} V \end{bmatrix}}^{*},$$

kjer sta U in V ortogonalni matriki, Σ pa diagonalna matrika singularnih lastnih vrednosti. Če upoštevamo, da je rang matrike r, potem lahko zapišemo:

$$A = {}_m \overset{\begin{array}{cc} r & m-r \end{array}}{\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}} \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} \overset{\begin{array}{cc} r & n-r \end{array}}{\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} {}_n \overset{\begin{array}{cc} r & n-r \end{array}}{\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}}^{*} = U_1\Sigma_r V_1^*.$$

Iz tega zapisa zlahka preverimo, da velja:

(i). Stolpci matrike U_1 tvorijo bazo za $\mathrm{im}(A)$.

(ii). Stolpci matrike U_2 tvorijo bazo za $\ker(A^*)$.

(iii). Stolpci matrike V_1 tvorijo bazo za $\mathrm{im}(A^*)$.

(iv). Stolpci matrike V_2 tvorijo bazo za $\ker(A)$.

Singularni razcep je močno orodje, ki se ga uporablja za regularizacijo problemov, kompakten razvoj po bazi nekega prostora, reševanje problema najmanjših kvadratov, kompresijo podatkov, odstranjenvanje šuma, ...

Naloga 1 *Poišči singularni razcep matrik*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad in \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Vemo, da so neničelne singularne lastne vrednosti enake $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^H)} = \sqrt{\lambda_i(A^H A)}$. Izračunamo

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \end{bmatrix}$$

To pomeni, da ima eno samo singularno lastno vrednost $\sqrt{25} = 5$. Zadnja dva stolpca matrike V pa sestavljata bazo za jedro matrike A. Prvi stolpec je enak normiranemu lastnemu vektorju za lastno vrednost 25,

$$\ker(A^T A - 25I) = \begin{bmatrix} -16 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -9 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\}.$$

Izračun pokaže, da naslednja dva normirana vektorja tvorita ortonormirano bazo za $\ker(A)$, oziroma za $\ker(A^T A)$,

$$\ker(A^T A) = \ker(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Izračuanjmo še $Av_1 = 5 = 5u_1 \Rightarrow u_1 = 1$. Torej velja

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še singularni razcep za B. Zopem bomo najprej izračunali lastne vrednosti in vektorje matrike

$$C = BB^T = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 1 \\ 1 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 12, \lambda_2 = 10 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{12}, \sigma_2 = \sqrt{10}.$$

Poleg tega velja še

$$\ker(C - 12I) = \ker\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{u_1} \right\}, \ker(C - 10I) = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{u_2} \right\}$$

Zdaj lahko izračunamo še u_1 in u_2. Uporabimo zvezo

$$B^* u_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \overbrace{\sqrt{12}}^{\sigma_1} v_1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$B^* u_2 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \overbrace{\sqrt{10}}^{\sigma_2} v_2 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Izračunati moramo samo še vektor v_3, ki je normirani vektor v

$$\ker(B) = \ker(B^* B) = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}}^{v_3} \right\}.$$

■

Naloga 2 *Neničelni projektor se da zapisati v obliki*

$$P = UU^H,$$

kjer je U $m \times n$ matrika, $m \geq n$, z ortogonalnimi stolpci. Trivialno je videti, da je P simetrična in idempotentna

$$P = P^H, \quad P = P^2.$$

Pokaži obrat zgornje trditve. Vsaka simetrična idempotentna matrika je projektor. Pomagaj si z singularnim razcepom.

Rešitev. Naj bo n rang matrike P, dimenzije $m \times m$, to je dimenzija prostora na katerega projiciramo.

Zapišimo singularni razcep matrike P, kjer je v Σ_1, dimenzije $n \times n$, zbranih vseh n neničelnih singularnih vrednosti P :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m-n \end{array} \\ m & \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m-n \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ m-n \end{array} & \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & m \\ \begin{array}{c} n \\ m-n \end{array} & \begin{bmatrix} V_1^H \\ V_2^H \end{bmatrix} \end{array} = U_1 \Sigma_1 V_1^H.$$

Stolpci $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ sestavljajo bazo za sliko matrike A, stolpci $V_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ sestavljajo bazo za sliko A^H.

$$\begin{aligned} (U_1 \Sigma_1 V_1^H)^H &= V_1 \Sigma_1 U_1^H \\ (U_1 \Sigma_1 V_1^H)^2 = \left(U_1 \Sigma_1 V_1^H\right) \left(V_1 \Sigma_1 U_1^H\right) = U_1 \Sigma_1^2 U_1^H &= U_1 \Sigma_1 V_1^H \iff V_1 = U_1 \Sigma_1 \\ V_1^H V_1 = I_m = (U_1 \Sigma_1)^H (U_1 \Sigma_1) = \Sigma_1^H U_1^H U_1 \Sigma_1 &= \Sigma_1^2 = I_m. \end{aligned}$$

■

Naloga 3 *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ in $m \geq n$. Prevedi računanje singularnega razcepa matrike $A = U \Sigma V^H$ na računanje singularnega racepa v realnem primeru. Pokaži, da ima dobljeni realni sistem dvojne singualrne vrednosti.*

Rešitev. Naj bosta u_i in v_i i-ta stolpca ortogonalnih matrik U in V. Matrika

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix}$$

ima na diagonali (realne) singularne vrednosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \ldots \geq \sigma_n$. Potem velja

$$A v_i = U \Sigma \underbrace{V^H v_i}_{e_i} = U \Sigma e_i = U \sigma_1 e_i = \sigma_i u_i.$$

Vidimo, da velja $Av = \sigma u$, kjer je $u = u_i$, $v = v_i$, $\sigma = \sigma_i$. Upoštevamo, da za kompleksno matriko A ter kompleksna vektorja velja:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + i A_2, \\ u &= u^{(1)} + i u^{(2)}, \\ v &= v^{(1)} + i v^{(2)}. \end{aligned}$$

Ker je σ realna dobimo

$$\begin{aligned} (A_1 + i A_2)(v^{(1)} + i v^{(2)}) &= \sigma (u^{(1)} + i u^{(2)}) \qquad (1) \\ A_1 v^{(1)} - A_2 v^{(2)} + i(A_1 v^{(2)} + A_2 v^{(1)}) &= \sigma u^{(1)} + i \sigma u^{(2)} \\ A_1 v^{(1)} - A_2 v^{(2)} &= \sigma u^{(1)} \text{ (realni del)} \\ A_1 v^{(2)} + A_2 v^{(1)} &= \sigma u^{(2)} \text{ (imaginarni del)}. \end{aligned}$$

Zadnji dve enačbi nam predstavljata realni bločni sistem

$$\begin{array}{c} \\ m \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad n & \quad n \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Dobljeni sistem je dvakrat večji, pokazati moramo še, da so singularne vrednosti dvojne. Pomnožimo (11) z $-i$ in dobimo

$$\begin{aligned} (A_1 + iA_2)(v^{(1)} + iv^{(2)}) &= \sigma(u^{(1)} + iu^{(2)}) \;/\cdot(-i) \\ A_1v^{(1)} - A_2v^{(2)} + i(A_1v^{(2)} + A_2v^{(1)}) &= \sigma u^{(1)} + i\sigma u^{(2)} \;/\cdot(-i) \\ -(A_1v^{(1)} - A_2v^{(2)})i + A_1v^{(2)} + A_2v^{(1)} &= -i\sigma u^{(1)} + \sigma u^{(2)} \\ A_1v^{(2)} + A_2v^{(1)} &= \sigma u^{(2)} \text{ (realni del)} \\ A_2v^{(2)} - A_1v^{(1)} &= -\sigma u^{(1)} \text{ (imaginarni del).} \end{aligned}$$

Torej velja

$$\begin{array}{c} \\ m \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad n & \quad n \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v^{(2)} \\ -v^{(1)} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ -u^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Našli smo še drugi levi singularni vektor $\begin{bmatrix} u^{(2)} \\ -u^{(1)} \end{bmatrix}$. Pokažimo še, da sta matriki

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2 & -U_1 \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2 & -V_1 \end{bmatrix}$$

ortogonalni. Spomnimo se, da je $U_1 + iU_2$ unitarna matrika. Tako velja

$$(U_1 + iU_2)^*(U_1 + iU_2) = (U_1^T - iU_2^T)(U_1 + iU_2) = U_1^TU_1 + U_2^TU_2 + i(U_1^TU_2 - U_2^TU_1) = I$$
$$\Updownarrow$$
$$U_1^TU_1 + U_2^TU_2 = I,\ U_1^TU_2 - U_2^TU_1 = 0.$$

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2 & -U_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2 & -U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^T & U_2^T \\ U_2^T & -U_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2 & -U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^TU_1 + U_2^TU_2 & U_1^TU_2 - U_2^TU_1 \\ U_2^TU_1 - U_1^TU_2 & U_2^TU_2 + U_1^TU_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

■

Naloga 4 *Dana je matrika A reda $m \times n$. Matriko B dobimo tako, da matriko A zarotiramo za 90° v smeri urinega kazalca. Na 3×2 matriki to izgleda takole*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \end{bmatrix}.$$

Ali imata A in B enake singularne vredosti? Dokaži ali poišči protiprimer.

Rešitev. Najprej napišemo formalni zapis preslikave na elementih matrike:

$$a_{ij} \mapsto a_{ji} \mapsto a_{j,n-i+1}.$$

Nato opazimo, da lahko našo preslikavo opišemo kot:

$$A \mapsto A^T \mapsto A^T J_m,$$

kjer je

$$J_m = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

matrika, ki naredi naslednjo permutacijo stolpcev, obrne vrstni red stolpcev,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tako smo že dobili, $A = U\Sigma V^H \to A^T = \bar{V}\Sigma^T U^T \to A^T J_m = \bar{V}\Sigma^T \bar{U}^* J_m$. Matriki $\bar{V}$ in $J_m \bar{V}$ sta spet unitarni. Na koncu upoštevamo še definicijo $\sigma_i(A) = \lambda_i(A^H A) = \lambda_i(AA^H)$. ∎

Naloga 5 *Dokaži, da je matrika X z najmanjšo normo $||X||_F$, ki minimizira $||XA - I_n||_F$ ravno $X = A^+$. Matrika A je dimenzije $m \times n$, kjer je $m \geq n$ in $rang(A) = r$.*

Rešitev. Naj bo podan singularni razcep matrike $A = U\Sigma V^T$ dimenzije $m \times n$ in ranga r. Potem je psevdoinverz $A^+ = V\Sigma^+ U^T$, kjer je

$$\Sigma = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \Sigma^+ = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

in $S = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$. Lotimo se reševanja. Najprej zapišemo X kot $X = VDU^T$, potem je $||X||_F = ||D||_F$ in velja

$$||XA - I||_F = ||VD\overbrace{U^T U}^{I}\Sigma V^T - I||_F \stackrel{V \text{ortogonalna}}{=} ||D\Sigma - I||_F.$$

Zadnji enačaj dobimo tako, da z leve pomnožimo z V^T, z desne pa z V. Matrika V je ortogonalna (untiarna), tako se Frobeniusova norma ne spremeni. Matriko D predstavimo v bločni obliki

$$D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & m-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_21 & D_{22} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Potem je $D\Sigma$ oblike

$$D\Sigma = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{bmatrix} D_{11}S & 0 \\ D_{21}S & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Če želimo, da bo $||D\Sigma - I||_F^2 = ||D_{11}S - I_r||_F^2 + ||D_{21}S||_F^2 + || - I_{n-r}||_F^2$ minimalna, moramo izbrati $D_{11} = S^{-1}$ in $D_{21} = 0$. Radi bi tudi, da je $||D||_F = ||X||_F$ čim manjša, torej je očitno najbolje izbrati $D_{12} = D_{22} = 0$. Velja namreč $||D||_F^2 = ||D_{11}||_F^2 + ||D_{21}||_F^2 + ||D_{12}||_F^2 + ||D_{22}||_F^2$. Dobili smo, da mora veljat $D = \Sigma^+$, kar nam da $X = V\Sigma^+ U^T = A^+$. ∎

Naloga 6 *Naj bo B poševno hermitska matrika. Pokaži, da za matriko*

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^H & I \end{bmatrix}$$

velja $\kappa_2(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2 = \frac{1+||B||_2}{1-||B||_2}$.

Rešitev. Matrika A je simetrična iz česar sledi, da so absolutne vrednosti lastnih vrednosti kar enake singularnim vrednostim. Naj bodo lastne vrednosti urejene po absolutni vrednosti. Potem velja:

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(A^2)} = \sqrt{(\lambda_i(A))^2} = |\lambda_i(A)|.$$

Polega tega za poševno simetrično matriko B in njen lastni par (α, x), $||x|| = 1$, velja:

$$\alpha =< Bx, x >=< x, B^H x >=< x, -Bx >= - < x, Bx >= -\overline{< Bx, x >} = -\overline{\alpha} \Longrightarrow \alpha \in i\mathbb{R}.$$

Na vajah smo uporabili dejstvo, da je iB hermitska matrika, kar nam da isti rezultat. Iz tega pa lahko sklepamo še, da je $iB = QDQ^*$, oziroma $B = Q(-iD)Q^T$. Izpeljimo še podobno kot za matriko A :

$$\sigma_i(B) = \sqrt{\lambda_i(B^*B)} = \sqrt{-\lambda_i(B^2)} = \sqrt{-(\lambda_i(B))^2} = |\lambda_i(B)|.$$

Spomnimo se še, da je druga norma matrike ravno enaka največji singularni vrednosti. Poizkusimo izračunati lastne vektorje in vrednosti za matriko A.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B \\ B^H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + By \\ B^H x + y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Dobili smo sistem

$$x + By = \lambda x$$
$$B^H x + y = \lambda y$$

Naj bo (x, α) lastni par matrike B. Podobno kot pri nalogi (3) ugotovimo, da velja

$$\begin{bmatrix} I & B \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix} = (1 + i\alpha) \begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{bmatrix} I & B \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ix \\ x \end{bmatrix} = (1 - i\alpha) \begin{bmatrix} ix \\ x \end{bmatrix}$$

To pa že pomeni, da velja $(\lambda - 1)^2 = \sigma_1^2 \to \lambda_1 = 1 + \sigma_1, \lambda_n = 1 - \sigma_n$. ■

Naloga 7 *Pokaži, da za kompleksno matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, obstaja* ***polarna dekompozicija***

$$A = U \cdot P,$$

kjer je U unitarna matrika in P hermitska pozitivno semidifinitna matrika. Pomagaj si s singularnim razcepom $A = U_1\Sigma V_1^*$ matrike. Pokaži, da je za obrnljivo matriko A ta razcep enoličen.

Rešitev. Izračunajmo

$$A^*A = P^* \overbrace{U_1^* U_1}^{I} P = P^* P = (U_1 \Sigma V_1^*)^* U_1 \Sigma V_1^* = V_1 \Sigma U_1^* U_1 \Sigma V_1^* = V_1 \Sigma^2 V_1^*,$$

torej poizkusimo z $P = V_1 \Sigma V_1^*$, ki je očitno hermitska pozitivno semidefinitna matrika, saj so vse lastne vrednosti večje ali enake 0. Določimo še možno izbiro za U,

$$A = U_1 \Sigma V_1^* = UP = UV_1 \Sigma V_1^*,$$

torej lahko definiramo $U = U_1 V_1^*$.

Pokažimo samo še enoličnost v primeru obrnljive matrike A. Recimo, da velja $U_1 P_1 = U_2 P_2$, potem lahko izrazimo $P_1 = U_1^H U_2 P_2$.

Matrika P_1 je pozitivno definitna, saj nobena singularna vrednost ni enaka 0. Tako se lastne vrednosti in singularne vrednosti ujemajo. Poleg tega so levi in desni singularni vektorji enaki lastnim vektorjem matrike. Naj bo Q_1 matrika sestavljena iz levih lastnih vektorjev matrike P_1. Matrika Λ_1 je diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi P_1 na diagonali. Potem velja

$$Q_1^H P_1 = \Lambda_1 Q_1^H = (Q_1^H U_1^H U_2) P_2.$$

Iz enakost levih in desnih singularnih vektorjev P_2 sledi $Q_1^H = Q_1^H U_1^H U_2$. Kar pomeni $U_1^H U_2 = I$, oziroma $U_1 = U_2$. ■

Spodaj so lanske vaje

Naloga 8 *Naj bo A hermitska matrika. Prevedi kompleksni problem lastnih vrednost na dvakrat večjega realnega.*

Rešitev. Za hermitsko matriko $A = B + iC$ velja

$$A^H = B^T - iC^T = A = B + iC,$$

iz česar dobimo $B^T = B$ in $C^T = -C$. Matrika A je hermitska, posledični ima same realna lastne vrednosti. Za normiran lastni vektor x namreč velja naslednji sklep

$$< Ax, x >=< \lambda x, x >= \lambda =< x, A^H x >=< x, Ax >=< x, \lambda x >= \overline{\lambda}.$$

Lastni vektor zapišemo kot $x = y + iz$, potem velja

$$Ax = (B + iC)(y + iz) = (By - Cz) + i(Cy + Bz) = \lambda x = \lambda y + i\lambda z. \tag{2}$$

Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned} By - Cz &= \lambda y \\ Cy + Bz &= \lambda z \end{aligned} \tag{3}$$

Sistem napišemo bločno:

$$\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Radi bi pokazali, da so se večkratnosti lastnih vrednosti ravno podvojile, zato moramo poiskati še en lastni vektor za λ. Ta lastni vektor najlažje dobimo tako, da v enačbi (3) zamnenjamo $y \to z$ in $z \to -y$ in opazimo, da s tem sistema ne spremenimo. Vse skupaj spet pospravimo v bločni sistem

$$\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ -y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} z \\ -y \end{bmatrix}.$$

Pokazati moramo seveda še, da so vsi vektorji linearno neodvisno. Upoštevamo, da vektorji $x_i = y_i + iz_i$ tvorijo ortonormirano bazo, torej velja

$$x_i^H x_j = (y_i^T - iz_i^T)(y_j + iz_j) = y_i^T y_j + z_i^T z_j + i(y_i^T z_j - z_i^T z_j) = \delta_{ij}$$

Iz teh zvez lahko zaključimo, da je tudi sistem bločnih vektorjev ortonormiran. ∎

Naloga 9 (Metoda Danilevskega) *Vemo, da so ničle polinoma ravno lastne vrednosti pridružene matrike. To bomo poizkusili izkoristiti za računanje lastnih vrednosti.*

a) Matrika oblike

$$C_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

je pridružena matrika polinoma

$$\phi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Pridružena matrika ni enolična, druga možnost je recimo C_ϕ^T. Pokaži, da je $\phi(x)$ karakteristični polinom za C_ϕ.

b) S podobnostmi transformacijami pretvori matriko A v obliko pridružene matrike

$$P = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & \cdots & -p_1 \end{bmatrix}^T.$$

Postopek naj bo iterativen $A^{(r+1)} = S_r^{-1} A^{(r)} S_r$, kjer je $A^{(1)} = A$ in $A^{(n)} = P$.

Nasvet oglej si matrike S_r, ki si enake indentiteti povsod, razen v r-tem stolpcu, ki je enak i-temu stolpcu matrike A.

Rešitev.

a) Z rekurzijo po dimenziji in potencah polinomov bomo pokazali ujemanje. Determinanto $|C_\phi - \lambda I|$ razvijemo po prvem stolpcu

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -\lambda - a_1 \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -\lambda - a_1 \end{vmatrix} - (-1)^{(n+1)}a_1 \begin{vmatrix} 1 & & & \\ -\lambda & \ddots & & \\ & \ddots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -\lambda - a_1 \end{vmatrix}.$$

Dobimo, da velja $|C_\phi - \lambda I| = (-1)^n \phi(x)$.

b) Naš cilj je, da se matrika $A^{(r+1)}$ od matrike $A^{(r)}$ razlikuje samo v r-tem in $(r+1)$-tem stolpcu, kjer r-ti stolpec transformiramo v e_{r+1}, kar dosežemo z matriko S_r, ki je identiteta, razen $(r+1)$-ti stolpec S_r je enak r-temu stolpcu matrike $A^{(r)}$. Tako definiramo

$$S_r = \begin{bmatrix} 1 & & a_{1r}^{(r)} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & a_{r+1,r}^{(r)} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & a_{nr}^{(r)} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Kratek izračun pokaže, da velja

$$S_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & -a_{1r}^{(r)}/a_{r+1,r}^{(r)} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1/a_{r+1,r}^{(r)} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -a_{nr}^{(r)}/a_{r+1,r}^{(r)} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Po prvem množenju dobimo $B^{(r)} = S_r^{-1} A^{(r)}$.

Matriko $B^{(r)}$ dobimo tako, da $(r+1)$-to vrstico $A^{(r)}$ delimo z $a_{r+1,r}^{(r)}$, nato pa to vrstico po vrsti množimo z $a_{ir}^{(r)}$, $i = 1, \dots, n, i \neq r+1$ in jo odštejemo od i-te. Seveda velja $S_r^{-1}A^{(r)}e_r = e_{r+1}$. Po drugi transformaciji $A^{(r+1)} = B^{(r)}S_r$ se spremeni le $(r+1)$-ti stolpec, ki je linearna kombinacija ostalih z $a_{ir}^{(r)}$ za $i = 1, \dots, n$ pomnoženih stolpcev.

■

Naloga 10 *Napravi metodo Danilevskega za matriko*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tako dobimo

$$S_1^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = S_1^{-1}AS_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Nadaljujemo z

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/7 \\ 0 & 1 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$

Izračunamo

$$S_2^{-1}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6/7 \\ 1 & 0 & -6/7 \\ 0 & 1 & 3/7 \end{bmatrix}$$

$$S_2^{-1}A^{(2)}S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6/7 \\ 1 & 0 & -6/7 \\ 0 & 1 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tako dobimo $\phi(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 6$. ■

Naloga 11 *Gerschgorinov izrek.*
Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $C_i = \{z \in \mathbb{C}_i, \quad |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}$ krog v kompleksni ravnini, za $i = 1, \ldots, n$.. Vse lastne vrednosti matrike A ležijo v uniji krogov $\cup_{i=1}^{n} C_i$.

Rešitev. Naj bo x lastni vektor in λ pripadajoča lastna vrednost. Poglejmo si enakost po vrsticah.

$$A(i,:)x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i.$$

Kar je ekvivalentno

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j = (\lambda - a_{ii})x_i.$$

Uporabimo absolutno vrednost in ocenimo:

$$|\lambda - a_{ii}||x_i| = |\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq ||x||_\infty \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Naj bo $|x_k| = ||x||_\infty$. Če postavimo $i = k$ dobimo,

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Kar pomeni $\lambda \in C_k$. Iz tega že sledi, da vsaka lastna vrednost leži v uniji krogov. ■

Naloga 12 *Določi območje v katerem se nahajajo lastne vrednosti matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 1 & 10 & 0.5 \\ 1.5 & -3 & 20 \end{bmatrix}.$$

a) Uporabi Gerschgorinov izrek.

b) Upoštevaj še, da imata matriki A in A^T iste lastne vrednosti.

c) Podobna matrika QAQ^{-1} ima iste lastne vrednosti kot matrika A. Ponavadi si za Q izberemo kar diagonalno matriko. Poišči optimalno matriko

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & k \end{bmatrix},$$

pri kateri dobiš najboljše oceno za tretjo lastno vrednost.

Uporabi Gerschgorinov izrek.

Rešitev.

a) Iz prve vrstice dobimo $|\lambda - 10| \leq 5$, iz druge dobimo $|\lambda - 10| \leq 1.5$, tretja nam da $|\lambda - 20| \leq 4.5$. Oceno za območje lahko izboljšamo tako, da isto oceno naredimo za A^T in podobno matriko DAD^{-1}, kjer je D diagonalna matrika. Vsako območje je določeno z unijo krogov. Lastne vrednosti se nahajajo v preseku vseh območij.

b) Zamenja se vloga vrstic in stolpcev. Tako dobimo ocene $|\lambda - 10| \leq 2.5$, $|\lambda - 10| \leq 7$, $|\lambda - 20| \leq 1.5$. Lastne vredosti ležijo v preseku obeh unij.

c) Izračunamo in dobimo

$$QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & \frac{1}{k} \\ 1 & 10 & 0.5\frac{1}{k} \\ 1.5k & -3k & 20 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo Gerschgorinov izrek in dobimo $|\lambda - 10| \leq 4 + \frac{1}{|k|}$, $|\lambda - 10| \leq 1 + 0.5\frac{1}{|k|}$, $|\lambda - 20| \leq 4.5|k|$. Radi bi, da ima krog okoli 20 čim manjši radij in prazen presek z ostalima dvema. To pomeni $20 - 4.5|k| \geq 14 + \frac{1}{|k|} \geq 11 + 0.5\frac{1}{|k|}$. Za mejne $|k|$ dobimo kvadratno enačbo $20 - 4.5|k| = 14 + \frac{1}{|k|} \Rightarrow -4.5|k|^2 + 6|k| - 1 = 0$. Dobimo $x_{12} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 * 4.5}}{-9} = \frac{2}{3} \mp \frac{\sqrt{2}}{3}$. Torej dobimo $0.195 \lessapprox |k| \lessapprox 1.13$. Vzamemo $|k|$, ki je čim manjši, tj. $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$. Še boljše rezultate dobimo z razširjenim Gerschgorinovim izrekom.

Izrek 1 *Če je Gerschgorinov krog disjunkten od drugih, potem v njem leži natanko ena lastna vrednost.*
Najmočnejša verzija izrek pravi, naj bo množica k krogov disjunktna od drugih $n - k$, potem v tej množici leži natanko k lastnih vrednosti matrike A.

Dokaz. Dokaz poteka s tehniko zveznega nadaljevanja. Naj bo D diagonala matrike A. Definiramo družino matrik $M(t) = (1-t)D + tA, \quad t \in [0,1]$. Za $t = 0$ dobimo diagonalo matrike A. Zanjo izrek očitno drži. Naj bodo r_i radiji in a_{ii} centri Gerschorinovih krogov $K(a_{ii}, r_i)$ matrike A. Kratek izračun pokaže, da ima $M(t)$ Gerschgorinove kroge $K(a_{ii}, tr_i)$ z istim centrom in radijem odvisnim od t. Tudi lastne vrednosti se spreminjajo zvezno od parametra t, kar najlažje vidimo, če izračunamo determinato in upoštevamo, da so ničle polinoma zvezne funkcije njegovih koeficientov. To pomeni, da če ima A množico k disjunktnih krogov od preostalih, je za vsak t (tudi za $t = 1$) v njej natanko k lastnih vrednosti. ∎

Naloga 13 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalno dominantna, tj.*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \quad za \quad vsak \quad i.$$

Potem je A obrnljiva.

Rešitev. Dovolj je pokazati, da so vse lastne vrednosti različne od 0. Fiksirajmo lastno vrednost λ. Po izreku leži v vsaj enem krogu. Torej velja

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Ali je lahko $\lambda = 0$. Če bi bila, bi veljalo $|a_{ii}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. Kar je protislovje. Matrika je res obrnljiva. ■

Posledica 2 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična, potem so vse lastne vrednosti realne. Vsak lastna vrednost leži v enem od intervalov*

$$[a_{ii} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|, a_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|].$$

Posledica 3 *Velja $|\lambda| \leq ||A||_\infty$.*

Dokaza posledic sta preprosta in ju prepuščam bralcu. ■

Naloga 14 (Brauerjev izrek) *Pokaži, da lastne vrednosti matrike A ležijo v uniji Cassinijevih ovalov $C_i = \{z; |z - a_{ii}||z - a_{jj}| \leq R_i R_j$, kjer je $R_i = \sum_{k=1,k\neq i}^{n} |a_{ik}|$.*

Rešitev. Naj bo x lastni vektor in λ pripadajoča lastna vrednost. Poglejmo si enakost po vrsticah. Prepostavili bomo, da ima lastni vektor x vsaj dve neničelni komponenti, največja po absolutni vrednosti naj bosta ravno x_k, druga največja pa x_k. Drugače je lastni vektor enotski in je izreku trivialno zadoščeno.

$$A(i,:)x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i.$$

Kar je ekvivalentno

$$\sum_{j=1,j\neq k}^{n} a_{ij}x_j = (\lambda - a_{kk})x_k \Longrightarrow |\lambda - a_{kk}| \left|\frac{x_k}{x_l}\right| \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{ij}| = R_k$$

oziroma

$$\sum_{j=1,j\neq l}^{n} a_{ij}x_j = (\lambda - a_{ll})x_l \Longrightarrow |\lambda - a_{ll}| \left|\frac{x_l}{x_k}\right| \leq \sum_{j=1,j\neq l}^{n} |a_{ij}| = R_l.$$

Obe dobljeni neenakosti zmnožimo in dobimo željeno,

$$|\lambda - a_{kk}||\lambda - a_{ll}| \leq R_k R_l.$$

■

Naloga 15 *Pokaži, da pri QR algoritmu brez premikov velja $A^k = \widetilde{Q}_{k-1}\widetilde{R}_{k-1}$, kjer je $\widetilde{Q}_{k-1} = Q_0 \dots Q_{k-1}$ in $\widetilde{R}_{k-1} = R_{k-1} \dots R_0$. S pomočjo te zveze sklepaj, da je $a_{nn}^{(k)}$ približek za najmanjšo lastno vrednost in tako dober kandidat za premik.*

Algoritem 1: QR iteracija brez premika

$A_0 = A$;
for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  $A_k = Q_k R_k$;
  $A_{k+1} = R_k Q_k$;
end

Rešitev. Najprej pokažimo trditev za $k = 2$. Upošteval bom zveze $A = A_0 = Q_0 R_0$, $A_1 = R_0 Q_0$, $A_1 = Q_1 R_1$.

$$A^2 = A * A = Q_0 \overbrace{R_0 Q_0}^{A_1 = Q_1 R_1} R_0 = Q_0 Q_1 R_1 R_0.$$

Pokazati moramo še korak indukcije. Tukaj bomo uporabili indukcijsko predpostavko za matriko A_1.

$$A^{k+1} = Q_0 R_0 \cdots Q_0 R_0 = Q_0 A_1^k R_0 = Q_0 Q_1 \cdots Q_k R_k \cdots R_1 R_0.$$

Tako velja $A^{-k} = \widetilde{R}_{k-1}^{-1} \widetilde{Q}_{k-1}^T$. Zadnja vrstica matrike A^{-k} je proporcionalna zadnji vrstici matrike $\widetilde{Q}_{k-1}^T$. Razen v izjemnem in pri numeričnem računanju malo verjetnem primeru, ko e_n nima nobene komponente v smeri y_n, bo vrstica $e_n^T A^{-k}$ po smeri konvergirala proti y_n^T. Poleg tega velja še: $a_{nn}^k = e_n^T A_k e_n$ in $A_k = \widetilde{Q}_{k-1}^T A \widetilde{Q}_{k-1}$. ∎

Naloga 16 *Matrika $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ naj bo simetrična, njene lastne vrednosti so $\lambda_1 > \lambda_1 > \lambda_2$. Določi kot med krožnicama, ki se ne dotikata, na enotski sferi, določenima z enačbo $\rho(x, A) = \lambda_2$.*

Rešitev. Matrika A je simetrična, torej se da diagonalizirati v ortonormirani bazi Q. Zapišemo lahko

$$Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Tako velja

$$\rho(x, A) = x^T A x = x^T Q^T D Q x = y^T D y, \text{kjer je } y = Qx.$$

Upoštevali smo, da ortogonalne matrike ohranjajo kote in norme vektorjev. Vektorji so enotski, saj ležijo na enotski sferi. Tako dobimo enačbo

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1.$$

Iz Rayleighovega kvocienta dobimo

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = \lambda_2.$$

Prvo enačbo pomnožimo z λ_2 in odštejemo od druge. Dobimo

$$(\lambda_1 - \lambda_2) y_1^2 + (\lambda_3 - \lambda_2) y_3^2 = 0 \Rightarrow y_3 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}} y_1.$$

To vstavimo v prvo enačbo in izračunamo

$$y_2 = \pm\sqrt{1 - y_1^2 - y_1^2\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}} = \pm\sqrt{1 - y_1^2\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}}$$

Izberemo dve krivulji, ki se ne dotikata.

$$r_1(y_1) = \left(y_1, \sqrt{1 - y_1^2\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}}, \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}y_1}\right),$$

$$r_2(y_1) = \left(y_1, \sqrt{1 - y_1^2\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}}, -\sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}y_1}\right).$$

Dobimo, da se krivulji sekata v $y_1 = 0$. Izračunamo še njuna odvoda v $y_1 = 0$.

$$r_1'(0) = \left(1, 0, \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}}\right),$$

$$r_2'(0) = \left(1, 0, .\sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}}\right).$$

Velja

$$||r_1'(0)|| = ||r_2'(0)|| = \sqrt{1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}}$$

in

$$\langle r_1'(0), r_2'(0)\rangle = 1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

Tako velja

$$\cos\phi = \frac{r_1'(0)r_2'(0)}{||r_1'(0)||||r_2'(0)||} = \frac{1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}}{1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}} = \frac{-\lambda_3 + 2\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_3}.$$

■

Naloga 17 *Naj bosta $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrični, da velja*

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A) \qquad \textit{in} \qquad \lambda_1(E) \geq \lambda_2(E) \geq \ldots \geq \lambda_n(E).$$

Dokaži, da potem velja

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(E) \leq \lambda_k(A + E) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(E).$$

Uporabi Courant-Fisherjev minimax izrek.

Rešitev. Velja
$$\lambda_k(A) = \min_{R\subseteq\mathbb{R}^n,\dim(R)=n-k+1} \max_{x\in R,x\neq 0} \rho(x,A),$$
kjer je $\rho(x,A+E) = \frac{x^T(A+E)x}{x^Tx} = \rho(x,A) + \rho(X,E)$. Dobimo
$$\lambda_k(A+E) = \min_{R\subseteq\mathbb{R}^n,\dim(R)=n-k+1} \max_{x\in R,x\neq 0} (\rho(x,A)+\rho(x,E)) \leq$$
$$\leq \min_{R\subseteq\mathbb{R}^n,\dim(R)=n-k+1} (\max_{x\in R,x\neq 0} \rho(x,A) + \rho(x,E)).$$
Velja tudi
$$\lambda_n(E) \leq \rho(x,E) \leq \lambda_1(E).$$
Če vzamemo $\max \rho(x,E)$ po celem prostoru, dobimo kvečjemu več. Torej velja $\lambda_k(A+E) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(E)$.

Za drugi del neenakosti lahko uporabimo drugi del minimax izreka. Lahko pa uporabimo pravkar dokazano neenakost za $-A$ in $-E$. To nam da
$$\lambda_k(-A-E) = -\lambda_{n-k+1}(A+E) \leq \lambda_k(-A) + \lambda_1(-E) = -(\lambda_{n-k+1}(A) + \lambda_n(E)).$$
Če neenakost pomnožimo z -1, smo končali. ∎

Naloga 18 *Naj bo A simetrična matrika z lastnimi pari $Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1,\dots,n$. Naj bo x aproksimacija za lastni vektor x_1 in naj bo $\mu = \rho(A,x)$ Rayleighov kvocient za x. Potem sledi*
$$|\mu - \lambda_1| \leq 2||A||||x-x_1||_2^2.$$
Dokaži.

Rešitev. Matrika A je simetrična, torej lastni vektorji tvorijo ortonormirano bazo. BŠS lahko privzamemo, da velja $||x||_2 = 1$. Vektor x razvijemo po ortonormirani bazi,
$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \text{ iz } ||x||_2 = 1 \text{ sledi } \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1.$$
Kratek račun pokaže, da je
$$\mu = x^TAx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$
Tako velja
$$|\mu-\lambda_1| = \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i^2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right| = \left|\sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1)\alpha_i^2\right| \leq 2||A|| \sum_{i=2}^n \alpha_i^2.$$
Upoštevali smo, da velja
$$|\lambda_i - \lambda_1| \leq |\lambda_i| + |\lambda_1| \leq 2||A||.$$
Izračunajmo še
$$||x-x_1||_2^2 = (\alpha_1-1)^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \geq \sum_{i=2}^n \alpha_i^2,$$
tako dobimo
$$|\mu-\lambda_1| \leq 2||A||||x-x_1||_2^2.$$
∎

Algoritem 2: Rayleighova iteracija

$\widetilde{z}_0 \neq 0$;
$z_0 = \frac{1}{||z_0||_2}\widetilde{z}_0$;
for $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**
  $\sigma_k := \rho(z_k, A) = \frac{z_k^T A z_k}{z_k^t z_k}$;
  reši $(A - \sigma_k I) y_{k+1} = z_k$;
  $z_{k+1} = \frac{1}{||y_{k+1}||_2} y_{k+1}$;
end

Naloga 19 *Zgled za konvergenco Rayleighove iteracije. Naj bo* $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ *in začetni približek* $z_0 = \begin{bmatrix} c_0 \\ s_0 \end{bmatrix}, ||z_0||_2^2 = c_0^2 + s_0^2 = 1$. *Izračunaj* z_1 *in sklepaj, da dobiš kubično konvergenco.*

Izračunamo lahko $\sigma_0 = \rho(z_0, A) = \lambda_1 c_0^2 + \lambda_2 s_0^2$ in

$$A - \sigma_0 I = \begin{bmatrix} \lambda_1(1 - c_0^2) - \lambda_2 s_0^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2(1 - s_0^2) - \lambda_1 c_0^2 \end{bmatrix}.$$

Rešimo diagonalni sistem in dobimo

$$y_1 = \begin{bmatrix} \frac{c_0}{\lambda_1(1-c_0^2)-\lambda_2 s_0^2} \\ \frac{s_0}{\lambda_2(1-s_0^2)-\lambda_1 c_0^2} \end{bmatrix}, \quad ||y_1||_2^2 = \frac{c_0^6 + s_0^6}{c_0^4 s_0^4} \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}, \quad z_1 = \begin{bmatrix} \frac{c_0^3}{\sqrt{c_0^6+s_0^6}} \\ -\frac{s_0^3}{\sqrt{c_0^6+s_0^6}} \end{bmatrix}.$$

V primeru, ko $c_0 \neq s_0$, BŠS $c_0 > s_0$, dobimo kubično kovergenco.

Naloga 20 *Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje tridiagonalne matrike dimenzije* $n \times n$, *kjer je* $a_{i,i-1} = c$, $a_{ii} = a$, $a_{i,i+1} = b$ *in* $bc > 0$. *Pomagaj si z ustrezno diferenčno enačbo s konstatnimi koeficienti.*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}$$

Rešitev. Upoštevamo, da mora veljati $Ax = \lambda x$. Tako dobimo sistem enačb:

$$(a - \lambda)x_1 + bx_2 = 0 \tag{5}$$
$$cx_{i-1} + (a - \lambda)x_i + bx_{i+1} = 0, \quad \text{i} = 2, \dots, \text{n-1} \tag{6}$$
$$cx_{n-1} + (a - \lambda)x_n = 0 \tag{7}$$

Zaradi lažjega računanja uvedemo še spremenljivki x_0 in x_n ter robna pogoja $x_0 = x_n = 0$. Torej rešujemo diferenčno enačbo

$$cx_{i-1} + (a - \lambda)x_i + bx_{i+1} = 0.$$

Uporabimo nastavek za homogeno rešitev $x_i = r^i$ in dobimo kvadratno enačbo za r,

$$c + (a - \lambda)r + br^2 = 0.$$

Enačbo rešimo, rešitvi sta

$$r_{1,2} = \frac{-(a-\lambda) \pm \sqrt{(a-\lambda)^2 - 4bc}}{2b}$$

Zapis se poenostavi, če uvedemo

$$\cos(\varphi) = \frac{\lambda - a}{2\sqrt{bc}}.$$

$$r_{1,2} = \sqrt{\frac{b}{c}}\left(\cos(\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(\varphi) - 1} = \sqrt{\frac{b}{c}}(\cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)\right) = \sqrt{\frac{b}{c}}e^{\pm i\varphi}.$$

Tako dobimo nastavek za rešitev $x_i = \alpha e^{i\varphi} + \beta e^{-i\varphi}$. Upoštevamo še robne pogoje

$$x_0 = \alpha + \beta = 0$$
$$x_{n+1} = \alpha e^{(n+1)i\varphi} + \beta e^{-(n+1)i\varphi}$$

Iz prve enačbe dobimo $\beta = -\alpha$. Iz druge enačbe dobimo

$$\alpha\left(e^{(n+1)i\varphi} - e^{-(n+1)i\varphi}\right) = i \cdot 2\sin((n+1)\varphi).$$

Njena rešitev je

$$(n+1)\varphi = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{n+1},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Rešitev s $k = 0$ ni dobra, saj potem sledi $x_i = 0$ za vsak i. Tako dobimo,

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{n+1},\ k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Za lastne vrednosti velja

$$\cos(\varphi) = \frac{\lambda - a}{2\sqrt{bc}} \Rightarrow \lambda_k = a + 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Pripadajoči lastni vektor ima komponente

$$x_j^{(k)} = \sqrt{\frac{b}{c}}\left(e^{i\cdot j\cdot\varphi_k} - e^{-i\cdot j\cdot\varphi_k}\right).$$

Zanima nas le smer, vzamemo lahko kar

$$x_j^{(k)} = \sin\left(\frac{j\cdot k\cdot\pi}{n+1}\right).$$

■

Naloga 21 (Posplošitev Rayleighovega kvocienta) *Naj bo $\rho(x, A) = \frac{x^TAx}{x^Tx}$ Rayleighov kvocient simetrične matrike A. Dokaži, da velja*

(i). Vrednost $\beta = \rho(x, A)$ minimizira $\min_\beta ||Ax - \beta x||_2$.

(ii). Poišči λ in μ, ki minimizira $\min_{\lambda,\mu} ||Ax - \lambda Bx - \mu Cx||_2$.

Vse matrike so simetrične.

Rešitev.

(i). Problem najlažje rešimo, če prepoznamo, da gre v bistvu za predoločen sistem

$$x\beta = Ax = b.$$

Tako dobimo normalni sistem $x^T x\beta = x^T Ax$, kar nam že da željeno rešitev.

Rešitev lahko dobimo tudi z iskanjem maksimuma skalarne funkcije $f(\beta) = ||Ax - \beta x||_2$. Lahko pa pokažemo tudi, da velja $x \perp Ax - \rho(x, A)x$.

(ii). Problem spet poizkusimo prevesti na reševanje predoločenega sistema.

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Bx + \mu Cx \\ \begin{bmatrix} Bx & Cx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} &= Ax \quad \text{predoločen sistem} \\ \begin{bmatrix} (Bx)^T \\ (Cx)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bx & Cx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (Bx)^T \\ (Cx)^T \end{bmatrix} Ax. \end{aligned}$$

Rešitev dobimo tako, da rešimo sistem

$$\begin{bmatrix} < Bx, Bx > & < Bx, Cx > \\ < Cx, Bx > & < Cx, Cx > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < Bx, Ax > \\ < Cx, Ax > \end{bmatrix}.$$

■

Naloga 22 ***Sturmovo zaporedje in bisekcija.***
Naj bo A simetrična tridiagonalna ireducibilna matrika, noben diagonalni element ni enak 0. Potem je število ničel p_n (lastnih vrednosti A) na intervalu (a, ∞) enako številu ujemanj predznaka v zaporedju

$$\overbrace{p_0(a), p_1(a), \ldots, p_{n-1}(a), p_n(a)}^{P(a)}.$$

Če velja $p_{k+1}(a) = 0$, to štejemo kot ujemanje predznaka. Končna ničla ni ujemanje predznaka. Število ničel na intervalu $(a, b]$ je enako številu ujemanj predznaka v zaporedju $P(a)$ - število ujemanj predznaka v zaporedju $P(b)$. Podana je matrika

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polinomi so enaki $p_0(\lambda) = 1, p_1(\lambda) = 2 - \lambda, p_2(\lambda) = (2 - \lambda)^2 - 1$ in

$$p_3(\lambda) = (2 - \lambda)^3 - 2(2 - \lambda).$$

Na tej matriki si oglejmo idejo bisekcije s Sturmovim zaporedjem na intervalu $(-3, 4]$.

Rešitev. Zaporedje $P(4)$ je enako $1, -2, 3, -4$ zaporedje $P(-3)$ je enako $1, 5, 24, 115$. Tako dobimo, da so na intervalu 3 ničle. Nadaljujemo z $(0.5, 4]$. Dobimo zaporedje $P(0.5)$ $1, 1.5, 1.25, 0.375$ Torej so na intervalu $(0.5, 4]$ 3 ničle, na $(-3, 0.5)$ pa nobena. Spet razpolovimo interval in dobimo zaporedje $P(2.25)$ $1, -0.25, -\frac{15}{16}, +$. Na intervalu $(2.25, 4]$ je 1 ničla, na intervalu $(0.5, 2.25]$ pa 2 ničli. Nadaljujemo ... ■

Naloga 23 *Radi bi preverili, da je izračun LDL^T za matriko $A - \lambda I$ stabilen.*

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} a_1-\lambda & b_1 & & & \\ b_1 & a_2-\lambda & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \ell_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ell_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ell_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \ell_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritem 3: LDL^T za $A - \lambda I$

$d_1 = a_1 - \lambda$;
for $i = 1, \ldots, n-1$ **do**
  $\ell_i = b_i/d_i$;
  $d_{i+1} = (a_{i+1} - \lambda) - \frac{b_i^2}{d_i}$;
end

Pokaži, da je formula za izračuna $d_i(\lambda)$ stabilna. Če ne pride do prepokoračitve, podkoračitve, se predznaki izračunanih diagonalnih elementov $\widehat{d}_i$ ujemajo s točnimi d_i iz LDL^T razcepa matrike $A + \delta A$, kjer je $\delta a_k = 0$ in $|\delta b_k| \leq \frac{5}{2}|b_k|u$, kjer je u osnovna zaokrožitvena napaka. Ali nam deljenje z 0 v IEEE aritmetiki povzroča težave?

Rešitev. Sledimo algoritmu:

$$\text{fl}(d_i) = \left[(a_i - \lambda)(1 + \epsilon_{-,1,i}) - \frac{b_{i-1}^2(1+\epsilon_{*,i})}{\text{fl}(d_{i-1})} \cdot (1 + \epsilon_{/,i})\right](1 + \epsilon_{-,2,i})$$

Potem lahko definiramo:

$$\widehat{d}_i = \frac{\text{fl}(d_i)}{(1+\epsilon_{-,1,i})(1+\epsilon_{-,2,i})}$$

$$\widehat{a}_{i-1} = a_{i-1}$$

$$\widehat{b}_{i-1} = b_{i-1} + \delta b_{i-1} = b_{i-1}\left(\frac{(1+\epsilon_{*,i})(1+\epsilon_{/,i})}{(1+\epsilon_{-,1,i})(1+\epsilon_{-,1,i-1})(1+\epsilon_{-,2,i-1})}\right)^{\frac{1}{2}} = b_{i-1}(1+\epsilon_i)$$

Prvi del indeksa napake označuje operacijo, kjer smo naredili napako, drugi del indeksa katero po vrsti, zadnji del indeksa označuje korak napake. Očitno velja $1 - \frac{5}{2}u \approx \sqrt{\frac{1-2u}{1+3u}} \leq 1 + \epsilon_i \leq \sqrt{\frac{1+2u}{1-3u}} \approx 1 + \frac{5}{2}u$. Z direktnim vstavljanjem definiranih količin, ugotovimo, da velja:

$$\widehat{d}_i = a_i - \lambda - \frac{\widehat{b}_{i-1}^2}{\widehat{d}_{i-1}}.$$

■

Naloga 24 (Računanje $f(A)$ prek Schurove forme) *Naj bo $f(A)$ analitična (holomorfna) funkcija definirana na spektru matrike $\lambda(A)$. Naj bo $Q^*AQ = T$ Schurova forma matrike A z različnimi lastnimi vrednostmi.*

(i). Pokaži, da velja $f(A) = Q^* f(T) Q$.

(ii). Pokaži, da velja $(f(T))_{ii} = f(T_{ii})$.

(iii). Pokaži, da velja $Tf(T) = f(T)T$.

(iv). Izpelji zvezo, kako i-to diagonalo $f(T)$ izračunaš iz diagonal z manjšim indeksom.

Rešitev. Označimo $B = f(T)$.

(i). Izračunajmo

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Gamma} f(z)(zI - Q^*TQ)^{-1}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Gamma} f(z)(Q(zI - T)Q^*)^{-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Gamma} f(z)(Q(zI - T)^{-1}Q^*)dz =$$

$$Q\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Gamma} f(z)(zI - T)^{-1}dz\right)Q^* = Qf(T)Q^*.$$

Matriki Q in Q^* lahko izpostavimo iz integrala, ker predstavljata konstanti.

(ii). Upoštevajmo, da velja $f(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i z^i$. Za diagonalne elemente velja $(T^k)_{ii} = (T_{ii})^k$, torej velja $f(T)_{ii} = f(T_{ii})$. Lahko pa upoštevamo, da so diagonalni elementi $(zI - T)^{-1}$, enaki $\frac{1}{z - t_{ii}}$. S pomočjo krivuljnega integrala dobimo našo rešitev.

(iii). Če upoštevamo, da velja $f(T) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i$, potem očitno velja $f(T)T = Tf(T)$, saj potence matrike T komutirajo. Druga možnost je, da upoštevamo definicijo s krivuljnim integralom in komutiranje T ter $(zI - T)^{-1}$.

(iv). Za $j > i$ velja

$$(BT)_{ij} = \sum_{k=i}^{j} b_{ik}t_{kj} = \sum_{k=1}^{j} t_{ik}b_{kj} = (TB)_{ij}.$$

Če sta t_{ii} in t_{jj} različna, lahko izrazimo

$$b_{ij} = t_{ij}\frac{b_{jj} - b_{ii}}{t_{jj} - t_{ii}} + \sum_{k=i+1}^{j+1} \frac{t_{ik}b_{kj} - b_{ik}t_{kj}}{t_{jj} - t_{ii}}.$$

Npr. $b_{2,5}$ izračunamo iz $b_{2,2}$, $b_{2,3}$, $b_{2,4}$, $b_{5,3}$, $b_{5,4}$, $b_{5,5}$. V splošnem je b_{ij} linearna kombinacija sosedov levo in pod njim.

---

for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $b_{ii} = f(t_{ii})$;
end
for $p = 1, \ldots, n-1$ **do**
  for $i = 1, \ldots, n-p$ **do**
    $j = i + p$;
    $b_{ij} = t_{ij}\frac{b_{jj} - b_{ii}}{t_{jj} - t_{ii}} + \sum_{k=i+1}^{j+1} \frac{t_{ik}b_{kj} - b_{ik}t_{kj}}{t_{jj} - t_{ii}}$;
  end
end
Število operacij je $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

$\blacksquare$

Naloga 25 *Določi časovno zahtevnost metode deli in vladaj za ireducibilno simetrično tridiagonalno matriko A.*

Rešitev. Upoštevali bomo še: Naj bo $D = \mathrm{diag}(\mathrm{d_1}, \ldots, \mathrm{d_n})$, $d_n < d_{n-1} < \cdots < d_1$ in

---

$[Q, D] = dc(T)$;
$m \approx n/2$;
$n = velikost(T)$;
if $velikost(T) == 1$ **then**
  return $Q = 1$, $\Lambda = T$;
end
deli T :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + b_m vv^T \ (v = e_m + e_{m+1})$$

$[Q_1, D_1] = dc(T_1)$;
$[Q_2, D_2] = dc(T_2)$;
Iz Q_1, Q_2, D_1, D_2 izračunaj $D + b_m uu^T$,

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, u = Q^T v$$

Reši pripadajočo sekularno enačbo in izračunaj lastne vekorje Q'.
$Q = Q * Q'$;

$u = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}^T$, $u_i \neq 0$ za $i = 1, \ldots, n$. Lastne vrednosti $D + \rho uu^T$ so rešitve sekularne enačbe $f(\lambda) = 0$, kjer je

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{d_i - \lambda}$$

Če je α lastna vrednost $D + \rho uu^T$, je $(D - \alpha I)^{-1} u$ ustrezni lastni vektor. Zapišimo rekurzivno zvezo za časovno zatevnost:

$$T_n = 2T_{n/2} + \overbrace{cn}^{\text{reševanje sekularne enačbe}} + \overbrace{dn^2}^{\text{izračun lastnih vektorjev}} + \overbrace{en^3}^{\text{računanje Q}}$$

Homogeni del diferenčne enačbe ima rešitev 0. Uporabimo rekurzivno zvezo, ter poizkusimo s polinomskim nastavkom $T_n = Cn^3$, kjer zanemarimo vse člene reda ≤ 2, upoštevamo še $e \leq 1$ in ugotovimo: $T_n \leq O(n^2) + \frac{4}{3}n^3$. ∎

Naloga 26 (Löwnerjev izrek) *Naj bo* $D = \mathrm{diag}(\mathrm{d_1}, \ldots, \mathrm{d_n})$, *kjer je* $d_n < d_{n-1} < \ldots d_1$, *in naj bodo* $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \cdots < \alpha_1$ *dana števila, ki se prepletajo z* d_i :

$$d_n < \alpha_n < d_{n-1} < \alpha_{n-1} < \cdots < d_2 < \alpha_2 < d_1 < \alpha_1$$

Potem za vektor $\widehat{u}$, *podan kot,*

$$|\widehat{u}_i| = \left(\frac{\prod_{j=1}^{n} (\alpha_j - d_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (d_j - d_i)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

velja, da so α_i *točne lastne vrednosti matrike* $\widehat{D} = D + \widehat{u}\widehat{u}^T$. *Dokaži izrek in ga razširi za primer, ko* ρ *ni enak* 1, *za* $D + \rho\widehat{u}\widehat{u}^T$. *V našem primeru so* α_i *ravno rešitve sekularne enačbe.*

Rešitev. Ideja je, da $\det(\widehat{D}-\lambda I)$ izračunamo na dva načina in pokažemo ujemanje. Upoštevamo še, da velja $\det(I+xy^T)=1+x^Ty$.

$$\det(\widehat{D}-\lambda I)=\det(D+\widehat{u}\widehat{u}^T-\lambda I)=\det\Big((D-\lambda I)(I+(D-\lambda I)^{-1}\widehat{u}\widehat{u}^T)\Big)=$$
$$\prod_{i=1}^n(d_i-\lambda)(1+\widehat{u}(D-\lambda I)^{-1}\widehat{u})=\prod_{i=1}^n(d_i-\lambda)\cdot\left(\sum_{j=1}^n\frac{\widehat{u}_j^2}{d_j-\lambda}\right)=\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\lambda)$$

V zadnjo enačbo vstavimo $\lambda=d_j$. Tako z zamenjavo $i\leftrightarrow j$ dobimo

$$\prod_{i=1}^n(\alpha_i-d_j)=\prod_{i=1,i\neq j}^n(d_i-d_j)\widehat{u}_j^2$$
$$\widehat{u_i}=\pm\left(\frac{\prod_{j=1}^n(\alpha_j-d_i)}{\prod_{j=1,j\neq i}^n(d_j-d_i)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Predznake si izberemo tako, da so enaki predznakom v vektorju u. Primer, ko je $\rho>0$, rešimo z uvedbo novega vektorja $\sqrt{\rho}\widehat{u}$. Tako lahko zapišemo $\rho\widehat{u}\widehat{u}^T=(\sqrt{\rho}\widehat{u})(\sqrt{\rho}\widehat{u})^T$. Primer negativnega ρ rešimo tako, da zapišemo $D+\rho\widehat{u}\widehat{u}^T=-(-D-\rho\widehat{u}\widehat{u}^T)$. Prepletanje seveda še vedno velja, samo vrsti red je ravno obrnjen, neenakosti pomnožimo z -1. ∎

Naloga 27 *Na predavanjih ste pokazali, da velja* $\det(I+xy^T)=1+y^Tx$. *Naj bosta* $X,Y\in\mathbb{R}^{m\times n}$. *Dokaži, da je* $\det(I_m+XY^T)=I_n+Y^TX$.

Rešitev. Najprej povejmo elegantno rešitev. Definirajmo matriki

$$A=\begin{bmatrix}I_n & -Y^T\\ X & I_m\end{bmatrix}\quad\text{in}\quad B=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ -X & I_m\end{bmatrix}.$$

Izračunamo

$$AB=\begin{bmatrix}I_n+Y^TX & -Y^T\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\quad\text{in}\quad BA=\begin{bmatrix}I_n & -Y^T\\ 0 & I_m+X^TY\end{bmatrix}.$$

Velja $\det(AB)=I_n+Y^TX=\det(BA)=\det(I_m+X^TY)$.
Tako se dokaz zelo poenostavi tudi v primeru, da sta x in y vektorja. Alternativno dokaz za ta primer je, da uporabimo operacije na vrsticah in stolpcih, ki ohranjajo determinanto.

$$I+xy^T=\begin{bmatrix}x_1y_1+1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2+1 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_ny_n & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{bmatrix}.$$

Prvo vrstico pomnožimo z $\frac{x_i}{x_1}$ ter odštejemo od i-te vrstice. Dobimo matriko

$$\begin{bmatrix}1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{x_n}{x_1} & & & 1\end{bmatrix}.$$

Zdaj pomnožimo j-ti stolpec z $\frac{x_j}{x_1}$ in ga prištejemo prvemo stolpcu, dobimo

$$\begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^n x_i y_i & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

S tem smo končali. ∎

To izkoristimo pri reševanju sekularne enačbe. Dobimo, da moramo rešiti enačbo

$$\det(D+\rho uu^T-\lambda I)=\det((D-\lambda I)(I+\rho(D-\lambda I)^{-1}uu^T)),$$

kar je ekvivalentno reševanju sekularne enačbe

$$\det(I+\rho(D-\lambda I)^{-1}uu^T)=1+\rho\sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{d_i-\lambda}=0.$$

Če je α lastna vrednost $D+\rho uu^T$, je $(D-\alpha I)^{-1}u$ ustrezni lastni vektor.

Naloga 28 *Reševanje sekularne enačbe. Iščemo ničle funkcije*

$$f(\lambda)=1+\rho\sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{d_i-\lambda}.$$

Njen odvod je

$$f'(\lambda)=\rho\sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{(d_i-\lambda)^2}.$$

Za $\rho>0$ je $f'>0$ in funkcija ima asimptoto 1.

Recimo, da iščemo rešitev na intervalu (d_i,d_{i+1}), kjer je začetni približek x_r. Navadne tangentne metode ne moremo porabiti, saj so ničle zelo blizu polov, zato bi potrebovali zelo dober začetni približek. Namesto aproksimacije funkcije s tangento raje uporabimo preprosto racionalno funkcijo, ki se prilega funkciji f na tem intervalu. Poiščemo racionalno funkcijo oblike

$$h(\lambda)=\frac{c_1}{d_i-\lambda}+\frac{c_2}{d_{i+1}-\lambda}+c_3,$$

za katero velja $h(x_r)=f(x_r)$ in $f'(x_r)=h'(x_r)$. Zaradi stabilnosti razdelimo f na dva dela kot

$$f(\lambda)=1+\rho\sum_{k=1}^i \frac{u_k^2}{d_k-\lambda}+\rho\sum_{k=i+1}^n \frac{u_k^2}{d_k-\lambda}=:1+\psi_1(\lambda)+\psi_2(\lambda).$$

To naredimo tako, da v vsoti $\psi_1(\lambda)$ oziroma $\psi_2(\lambda)$ seštevamo enako predznačene člene. Sedaj določimo c_1, c_1' tako da za

$$h_1(\lambda)=\frac{c_1}{d_i-\lambda}+c_1'$$

velja $h_1(x_r)=\psi_1(x_r)$ in $h'(x_r)=\psi_1'(x_r)$. Podobno določimo tudi c_2 in c_2' tako, da za

$$h_2(\lambda)=\frac{c_2}{d_{i+1}-\lambda}+c_2'$$

velja $h_2(x_r)=\psi_2(x_r)$ in $h_2'(x_r)=\psi_2'(x_r)$. Sedaj je $h(\lambda)=1+h_1(\lambda)+h_2(\lambda)$ iskana racionalna funkcijo. Enačba $h(\lambda)=0$ ima dve rešitvi, za nov približek x_{r+1} vzamemo tisto, ki leži na intervalu (d_{i+1},d_i). Oglejmo si primer v Mathematici.

Naloga 29 *Poišči vektor v, tako da za*

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

in

$$T_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & a_{k-1} & b_{k-1} \\ 0 & & b_{k-1} & a_k - b_k \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} a_{k+1} - b_k & b_{k+1} & & 0 \\ b_{k+1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

velja

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + b_k v v^T.$$

Rešitev. V originalni matriki T sta se spremenili le vrstici in stolpca k in $k+1$. Veljati mora

$$\begin{bmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k - b_k & 0 \\ 0 & a_{k+1} - b_k \end{bmatrix} + b_k z z^T.$$

Torej mora veljati $z = [1, 1]^T$. Tako je potem $v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & k & k+1 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \end{array}$. ∎

Naloga 30 *Matriko A lahko zapišemo v obliki*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

kjer so A_{ij} kvadratne matrike dimenzije $n \times n$. Vse matrike A_{ij} se dajo hkrati diagonalizirati (imajo skupno bazo). Dokaži, da so lastne vrednosti matrike A, kar lastne vrednosti 2×2 matrik

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11}^{(k)} & \lambda_{12}^{(k)} \\ \lambda_{21}^{(k)} & \lambda_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

kjer so $\lambda_{ij}^{(k)}$ lastne vrednosti A_{ij}, ki pripadajo skupnemu lastnemu vektorju.

Rešitev. Naj velja $X A_{ij} X^{-1} = D_{ij}$, kjer je X matrika lastnih vektorjev in so D_{ij} diagonalne matrike. Na matriki A naredimo naslednjo transformacijo

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = D.$$

Oglejmo si, kdaj lahko velja $Dx = \lambda x$. Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} D_{11}(i,i) x_i + D_{12}(i,i) x_{i+n} &= \lambda x_i \quad i = 1, \ldots, n \\ D_{21}(i,i) x_i + D_{22}(i,i) x_{i+n} &= \lambda x_{i+n} \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Če si ogledamo enačbe z enakim indeksom v prvi in drugi vrstici, dobimo

$$\begin{bmatrix} D_{11}(i,i) & D_{12}(i,i) \\ D_{21}(i,i) & D_{22}(i,i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+n} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+n} \end{bmatrix}.$$

S tem končamo dokaz, saj velja

$$D_{ij}(k,k) = \lambda_{ij}^{(k)}.$$

■

Naloga 31 *Poišči ortogonalno matriko (Givensovo rotacijo), ki zamenja dva sosednja elementa na diagonali zgornje trikotne matrike R.*

Rešitev. Spomnimo se, da Givensova rotacija R_{ik}^T matrika enaka identiteti povsod razen v i-ti in k-ti vrstici in preslika i-to in k-to komponento vektorja x v vektorja y, ki ima k-to komponento enako 0.

$$R_{ik}^T([i,k],[i,k]) = \begin{bmatrix} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}} & \frac{x_k}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}} \\ -\frac{x_k}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}} & \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}} \end{bmatrix}.$$

Če matriko uporabimo na matriki, se spremenita le vrstici i in k, vse druge vrstice ostanejo nespremenjene.

Poiskali bomo rotacijo, ki zamenja i-ti in $(i+1)$-ti element na diagonali. Da iskanje poenostavimo izberemo

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} i & i+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ i+1 \end{array} & \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ustrezno podmatriko označimo z

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} i & i+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ i+1 \end{array} & \begin{bmatrix} a & t \\ 0 & b \end{bmatrix} \end{array}$$

S krajšim izračunom dobimo

$$QAQ^* = \begin{bmatrix} a\cos^2\phi + t\cos\phi\sin\phi + b\sin^2\phi & -a\cos\phi\sin\phi + t\cos^2\phi + b\sin\phi\cos\phi \\ -a\sin\phi\cos\phi - t\sin^2\phi + b\sin\phi\cos\phi & a\sin^2\phi - t\sin\phi\cos\phi + b\cos^2\phi \end{bmatrix}.$$

Tako smo dobili sistem

$$\begin{aligned} b =& a\cos^2\phi + t\cos\phi\sin\phi + b\sin^2\phi \\ t =& -a\cos\phi\sin\phi + t\cos^2\phi + b\sin\phi\cos\phi \\ a =& a\sin^2\phi - t\sin\phi\cos\phi + b\cos^2\phi \\ 0 =& -a\sin\phi\cos\phi - t\sin^2\phi + b\sin\phi\cos\phi \end{aligned} \tag{8}$$

Zadnjo enačbo delimo s $\sin\phi\cos\phi$ in dobimo

$$0 = -a - t\tan\phi + b \Longrightarrow \tan\phi = \frac{b-a}{t}.$$

Podobno prvo enačbo delimo s $\cos^2\phi$ in upoštevamo, da velja $1 + \tan^2\phi = \frac{1}{\cos^2\phi}$

$$\frac{b}{\cos^2\phi} = a + t\tan\phi + b\tan^2\phi \Longrightarrow b + b\frac{(b-a)^2}{t^2} = a + t\frac{b-a}{t} + b\frac{(b-a)^2}{t^2}.$$

Enakost zares velja, tako se lotimo še druge in tretje enačbe. Podobno kot prej delimo drugo enačbo s $\cos^2\phi$, tako z nekaj premetavanja dobimo

$$t(\frac{1}{\cos^2\phi} - 1) = (b-a)\tan\phi \Longrightarrow t\frac{(b-a)^2}{t^2} = \frac{(b-a)^2}{t}.$$

Analogen sklep kot za prvo naredimo za tretjo enačbo. Mislimo si lahko, da zamenjamo vlogi a in b ter t z $-t$. Izraz za $\tan\phi$ je na to spremembo invarianten. ∎

Naloga 32 *Naj bosta A in B simetrični matriki, ki komutirata. Pokaži, da obstaja ortogonalna matrika Q, da velja $Q^*AQ = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_\mathrm{n})$ in $Q^*BQ = \mathrm{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_\mathrm{n})$. Matriki A in B sta diagonalizabilni v skupni ortogonalni bazi. Najprej predpostavi, da so vse lastne vrednosti matrike A različne, nato pa rezultat posploši.*

Rešitev. Najprej predpostavimo, da so vse lastne vrednosti matrike A različne. Naj bo z_i lastni vektor matrike A za lastno vrednost α_i. Izračunajmo $BAz_i = \alpha_i Bz_i = ABz_i$, torej je Bz_i tudi lastni vektor za α_i ali pa velja $Bz_i = 0$. Torej velja $Bz_i = \beta_i z_i$. Matriki si tako delita lastne vektorje.

Pokažimo še primer, ko obstaja večkratna lastna vrednost α_1. Prvi blok matrike $Q = [Q_1\, Q_2]$ naj predstavlja bazo lastnih vektorjev za α_1. Izračunajmo

$$\begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^*AQ_1 & Q_1^*AQ_2 \\ Q_2^*AQ_1 & Q_2^*AQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^*AQ_1 & 0 \\ 0 & Q_2^*AQ_2 \end{bmatrix}.$$

Naredimo isti sklep kot prej za lastni vektor z. $BAz = \alpha_1 Bz = A(Bz)$, torej je Bz spet element prostora, ki predstavlja bazo lastnih vektorjev za α_1, ali pa je v jedru matrike B. Tako velja

$$Q^*BQ = \begin{bmatrix} Q_1^*BQ_1 & 0 \\ 0 & Q_2^*BQ_2 \end{bmatrix}.$$

Torej je zadosti, da pokažemo skupno diagonalizabilnost matrik $B_{11} = Q_1^*BQ_1$ in $A_{11} = Q_1^*AQ_1$. To naredimo zlahka, saj je B_{11} spet simetrična matrika, ki se da diagonalizirati v bazi Q_3. Polega tega velja $A_{11} = Q_1^*AQ_1 = \alpha_1 I$ in $Q_3^*A_{11}Q_3 = Q_3^*\alpha I Q_3 = \alpha I$. ∎

Naloga 33 *Naj bo A poševno Hermitska matrika, pokaži da so vse njene lastne vrednosti strogo imaginarne ($i\lambda$). Potem pokaži še, da velja:*

(i). Matrika $I - A$ je nesingularna.

(ii). Matrika $B = (I-A)^{-1}(I+A)$ je unitarna.

Rešitev. Za poševno Hermitsko matriko velja $A^H = -A$. Naj bo x normiran lastni vektor za lastno vrednost λ. Potem velja

$$\langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \tag{9}$$

$$\left\langle x, A^H x\right\rangle = \langle x, -Ax\rangle = \langle x, -\lambda x\rangle = -\overline{\lambda}. \tag{10}$$

Iz enakosti prve in druge vrstice dobimo $\lambda = -\overline{\lambda}$. Primerjamo realni in imaginarni deli in dobimo, da so lastne vrednosti čisto imaginarne.

(i). Če je $I - A$ singularna matrika, potem obstaja vektor x za katerega velja

$$(I - A)x = 0 \Longrightarrow Ax = x.$$

To pomeni, da bi morala matrika A imeti lastno vrednost 1, kar ne more biti res, saj ima matrika samo čisto imaginarne lastne vrednosti.

(ii). Najprej izračunamo B^H.

$$B^H = \left((I - A)^{-1}(I + A)\right)^H = (I + A)^H((I - A)^H)^{-1} = (I - A)(I + A)^{-1}$$

Nato pokažemo, da velja $B^H = B^{-1}$.

$$B^{-1} = (I + A)^{-1}(I - A)$$

Pokazati moramo še, da matriki $(I + A)^{-1}$ in $(I - A)$ komutirata. To je res, velja namreč

$$(I + A)(I + A)^{-1}(I - A)(I + A) = (I + A)(I - A)(I + A)^{-1}(I + A) = I - A^2$$

■

Naloga 34 *Izpelji iterativno metodo za računanje inverza matrike A.*

(i). Pomagaj si s tangentno metodo za $f(x) = \frac{1}{x} - a$ in jo posploši na matrike.

(ii). Naj bo $Y_{(k)} = AX_{(k)} - I$, pokaži da velja $Y_{(k+1)} = -Y_{(k)}^2$.

(iii). Določi zadosten pogoj za konvergenco in primeren začetni približek.

Rešitev.

(i). Tangentna metoda za $f(x) = \frac{1}{x} - a$ je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - a}{-\frac{1}{x_k^2}} = 2x_k - ax_k^2 = 2x_k - x_k a x_k.$$

Tako definiramo $X_{(k+1)} = 2X_{(k)} - X_{(k)}AX_{(k)}$.

(ii).

$$Y_{(k+1)} = AX^{(k+1)} - I = A(2X_{(k)} - X_{(k)}AX_{(k)}) - I =$$

$$2AX_{(k)} - (AX_{(k)})^2 - I = -(AX_{(k)} - I)^2 = -Y_{(k)}^2$$

(iii). Če bo spektralni radij matrike $Y_{(0)} = AX_{(0)} - I$, manjši od 1, bo veljalo

$$\lim_{i\to\infty} Y_{(k)} = \lim_{i\to\infty} (-1)^i (Y_{(0)})^{2^i} = 0.$$

(iv). Za začetni približek $X_{(0)} = \frac{1}{||A|_F} A^*$, bo imela matrika $Y_{(0)} = AX_{(0)} - I$ lastne vrednosti $\frac{\sigma_i}{||A||_F} - 1$, ki so po absolutni vredosti manjše od 1.

■

Naloga 35 *Pokaži, da za enostavno končno lastno vrednost poplošenega problema lastnih vrednosti $Ax = \lambda Bx$ velja $y^* Bx \neq 0$, kjer je x desni lastni vektor in y levi lastni vektor.*

Rešitev. Na vajah smo najprej poizkusili rešiti nalogo s pomočjo posplošene Schurove forme. Vendar ta pot privede v slepo ulico, saj pri Schurovi formi ne moremo izkoristiti dejstva, da je lastna vrednost enostavna. Potrebno je uporabiti Jordansko formo za posplošene probleme,

$$B_J = X(A - \lambda B)X^{-1} = \begin{bmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) & \\ & & & N \end{bmatrix},$$

kjer so bloki označeni z J končni Jordanski bloki, N je bločno diagonalna matrika, na njeni bločni diagonali so neskončni bloki N_d.

$$J_d(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha - \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{d \times d}, \quad N_d = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{d \times d}.$$

Naj bo λ_1 enostavna lastna vrednost, potem zanjo obstaja samo ena kletka dimenzije $J_1(\lambda_1)$. BŠS predpostavimo, da je to prvi blok v Jordanski formi

$$B_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

To pomeni, da sta levi in desni lastni vektor za λ_1 oba enaka e_1. Velja še

$$XBX^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}.$$

Tako dobimo $e_1^H XBX^{-1} e_1 = (e_1^H X)B(X^{-1}e_1) = 1$, vektor $X^H e_1$ je ustrezni levi lastni vektor, vektor $X^{-1}e_1$ je ustrezni desni lastni vektor. ∎

Naloga 36 *Izpelji formulo za izračun spodnje desne 2×2 matrike AB^{-1}, kjer je A zgornje Hessenbergova matrika in B zgornje trikotna matrika.*

Rešitev. Problem bomo shematsko ponazorili za matrike dimenzije 6×6.

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} \\ & & & & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} \\ & & & & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} \\ & & & & & {\color{red}\times} \end{bmatrix}.$$

Za izračun spodnje 2×2 matrike bomo potrebovali samo rdeče označene elemente. Izračun inverza spodnje 3×3 matrike zlahka opravimo, velja namreč

$$\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & E \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C^{-1} & T \\ 0 & E^{-1} \end{bmatrix}.$$

Torej dobimo inverz spodnje 3×3 matrike v B kot

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{b_{n-2,n-2}} & -\frac{b_{n-2,n-1}}{b_{n-2,n-2}b_{n-1,n-1}} & \frac{b_{n-2,n-1}b_{n-1,n}-b_{13}b_{n-1,n-1}}{b_{n-2,n-2}b_{n-1,n-1}b_{n,n}} \\ 0 & \frac{1}{b_{n-1,n-1}} & -\frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}b_{n,n}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{b_{n,n}} \end{bmatrix}$$

■

Končnega rezultata ne bomo napisali, saj ga dobimo preprosto tako, da zmnožimo zadnji dve vrstici A in zadnja dva stolpca B^{-1}.

Naloga 37 *Izpelji formulo za izračun prvega stolpca matrike*

$$N = C^2 - \mathit{sled}(P)C + \det(P)I = C^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)C + \lambda_1\lambda_2 I$$

Matrika C je enaka AB^{-1}, kjer so matrike A in B iste kot v prejšnji nalogi.

Rešitev. Matrika C je spet zgornje Hessenbergova. Naslednja shema prikazuje izračun njenih prvih dveh stolpcev,

$$\begin{bmatrix} {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & \times & \times & \times & \times \\ {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & {\color{red}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & {\color{red}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \\ & & & & & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \end{bmatrix}$$

Izračun prvega stolpca C^2 poteka na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\color{green}\times} & \times & \times & \times & \times & \times \\ {\color{green}\times} & \times & \times & \times & \times & \times \\ {\color{green}\times} & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Tako lahko učinkovito izračunamo pri stolpec matrike N. Skicirajmo še premikanje grbe v tem primeru. Najprej transformiramo prvi stolpec AB^{-1} v prvi stolpec N z ustreznim Householderjevim zrcaljenjem

$$Q_1 = \begin{array}{c} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \;\;3 \\ \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline & I \end{array}\right] \end{array}.$$

To zrcaljene pokavari le prve tri stolpce matrik A in B.

$$Q_1A = \begin{bmatrix} {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & \times & \times & \times \\ {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & \times & \times & \times \\ {\color{blue}\times} & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \end{bmatrix}, Q_1B = \begin{bmatrix} {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & \times & \times & \times \\ {\color{blue}\times} & {\color{red}\times} & {\color{red}\times} & \times & \times & \times \\ {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \\ & & & & & \times \end{bmatrix}$$

Naš cilj je premakniti grbo spodaj desno. Uporabimo ustrezna Householderjeva zrcaljenja z leve in desne.

$$Q_1AH_1R_1 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times & \times \\ {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \end{bmatrix}, Q_1BH_1R_1 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \\ & & & & & \times \end{bmatrix}$$

$$H_2Q_1AH_1R_1 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times \\ & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \end{bmatrix}, H_2Q_1BH_1R_1 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times \\ & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times & \times \\ & {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \\ & & & & & \times \end{bmatrix}$$

Tako grbo premikamo navzdol, dokler v zadnjem koraku ne izgine. ∎

Naloga 38 *S pomočjo kakšnih ortogonalnih transformacij lahko v primeru* $B(i,i) = 0$ *premakemo to ničlo v* $B(n,n)$ *in hkrati v matriki* A *naredimo še* $A(n,n-1) = 0$.

Rešitev. Resitev si bomo ogledali na primeru 5×5 matrik, kjer je $B(3,3) = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & 0 & {\color{blue}\times} & \times \\ & & & {\color{blue}\times} & \times \\ & & & & \times \end{bmatrix}$$

$$Q_{34}A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & {\color{blue}\times} & {\color{blue}\times} & \times & \times \\ & & & \times & \times \end{bmatrix}, \quad Q_{34}B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & 0 & \times & \times \\ & & & 0 & \times \\ & & & & \times \end{bmatrix}$$

$$Q_{34}AZ_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & 0 & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \end{bmatrix}, \quad Q_{34}BZ_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & 0 & \times & \times \\ & & & 0 & {\color{blue}\times} \\ & & & & {\color{blue}\times} \end{bmatrix}$$

$$Q_{45}Q_{34}AZ_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & 0 & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \end{bmatrix}, \quad Q_{45}Q_{34}BZ_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & 0 & \times & \times \\ & & & 0 & \times \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{45}Q_{34}AZ_{23}Z_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & 0 & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \end{bmatrix}, \quad Q_{45}Q_{34}BZ_{23}Z_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & 0 & \times \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{45}Q_{34}AZ_{23}Z_{34}Z_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & 0 & \times & \times & \times \\ & & & 0 & \times \end{bmatrix}, \quad Q_{45}Q_{34}BZ_{23}Z_{34}Z_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

■

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(\mathbb{C}^{m\times n})$, $m \geq n$, matrika ranga r. Potem zanjo obstaja singularni razcep:

$$A = U\Sigma V^* = {}_m\begin{bmatrix} \overset{m}{U} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m-n \end{matrix} \begin{bmatrix} \overset{n}{\Sigma_n} \\ 0 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} \overset{n}{V} \end{bmatrix}^*,$$

kjer sta U in V ortogonalni matriki, Σ pa diagonalna matrika singularnih lastnih vrednosti. Če upoštevamo, da je rang matrike r, potem lahko zapišemo:

$$A = {}_m\begin{bmatrix} \overset{r}{U_1} & \overset{m-r}{U_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \begin{bmatrix} \overset{r}{\Sigma_r} & \overset{n-r}{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} \overset{r}{V_1} & \overset{n-r}{V_2} \end{bmatrix}^* = U_1\Sigma_r V_1^*.$$

Iz tega zapisa zlahka preverimo, da velja:

(i). Stolpci matrike U_1 tvorijo bazo za $\mathrm{im}(A)$.

(ii). Stolpci matrike U_2 tvorijo bazo za $\ker(A^*)$.

(iii). Stolpci matrike V_1 tvorijo bazo za $\mathrm{im}(A^*)$.

(iv). Stolpci matrike V_2 tvorijo bazo za $\ker(A)$.

Singularni razcep je močno orodje, ki se ga uporablja za regularizacijo problemov, kompakten razvoj po bazi nekega prostora, reševanje problema najmanjših kvadratov, kompresijo podatkov, odstranjevanje šuma, ...

Naloga 39 *Dokaži, da za matriko X z najmanjšo normo $||X||_F$, ki minimizira $||XA - I_n||_F$ velja $X = A^+$. Matika A je dimenzije $m \times n$, kjer je $m \geq n$ in rang$(A) = r$.*

Rešitev. Naj bo podan singularni razcep matrike $A = U\Sigma V^T$ dimenzije $m \times n$ in ranga r. Potem je psevdoinverz $A^+ = V\Sigma^+ U^T$, kjer je

$$\Sigma = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \Sigma^+ = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

in $S = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$. Lotimo se reševanja. Najprej zapišemo X kot $X = VDU^T$, potem je $||X||_F = ||D||_F$ in velja

$$||XA - I||_F = ||VD\overbrace{U^TU}^{I}\Sigma V^T - I||_F \overset{V ortogonalna}{=} ||D\Sigma - I||_F.$$

Zadnji enačaj dobimo tako, da z leve pomnožimo z V^T, z desne pa z V. Matrika V je ortogonalna, tako se Frobeniusova norma ne spremeni. Matriko D predstavimo v bločni obliki

$$D = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & m-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_21 & D_22 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Potem je $D\Sigma$ oblike

$$D\Sigma = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{bmatrix} D_{11}S & 0 \\ D_{21}S & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Če želimo, da bo $||D\Sigma - I||_F^2 = ||D_{11}S - I_r||_F^2 + ||D_{21}S||_F^2 + || - I_{n-r}||_F^2$ minimalna, moramo izbrati $D_{11} = S^{-1}$ in $D_{21} = 0$. Radi bi tudi, da je $||D||_F = ||X||_F$ čim manjša, torej je očitno najbolje izbrati $D_{12} = D_{22} = 0$. Velja namreč $||D||_F^2 = ||D_{11}||_F^2 + ||D_{21}||_F^2 + ||D_{12}||_F^2 + ||D_{22}||_F^2$. Dobili smo, da mora veljat $D = \Sigma^+$, kar nam da $X = V\Sigma^+ U^T = A^+$. ■

Naloga 40 *Poišči singularni razcep matrik*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad in \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Vemo, da so neničelne singularne lastne vrednosti enake $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^H)} = \sqrt{\lambda_i(A^HA)}$. Izračunamo

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \end{bmatrix}$$

To pomeni, da ima eno samo singularno lastno vrednost $\sqrt{25} = 5$. Zadnja dva stolpca matrike V pa sestavljata bazo za jedro matrike A. Prvi stolpec je enak normiranemu lastnemu vektorju za lastno vrednost 25,

$$\ker(A^TA - 25I) = \begin{bmatrix} -16 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -9 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\}.$$

Izračun pokaže, da naslednja dva normirana vektorja tvorita ortonormirano bazo za $\ker(A)$, oziroma za $\ker(A^TA)$,

$$\ker(A^TA) = \ker(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Izračuanjmo še $Av_1 = 5 = 5u_1 \Rightarrow u_1 = 1$. Torej velja

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še singularni razcep za B. Zopem bomo najprej izračunali lastne vrednosti in vektorje matrike

$$C = BB^T = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 1 \\ 1 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 12, \lambda_2 = 10 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{12}, \sigma_2 = \sqrt{10}.$$

Poleg tega velja še

$$\ker(C - 12I) = \ker\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{u_1} \right\}, \ker(C - 10I) = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{u_2} \right\}$$

Zdaj lahko izračunamo še u_1 in u_2. Uporabimo zvezo

$$B^* u_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \overbrace{\sqrt{12}}^{\sigma_1} v_1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$B^* u_2 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \overbrace{\sqrt{10}}^{\sigma_2} v_2 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Izračunati moramo samo še vektor v_3, ki je normirani vektor v

$$\ker(B) = \ker(B^*B) = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}}^{v_3} \right\}.$$

■

Naloga 41 (Psevdospekter) *Pokaži, da so naslednje trditve za psevdospekter ekvivalentne. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in množica L_ϵ zadošča pogojem:*

a) z je lastna vrednost matrike $A + \delta A$ za nek $||\delta A|| \leq \epsilon$

b) obstaja vektor $u \in \mathbb{C}^{n\times n}$, da velja $||(A - zI)u|| \leq \epsilon$ in $||u|| = 1$

c) $\sigma_n(A - zI) \leq \epsilon$

d) $||(A - zI)^{-1}|| \geq \epsilon$

Singularne vrednosti so indeksirane od največje do najmanjše, σ_n je tako najmanjša singularna vrednost. Če je z lastna vrednost A, potem definiramo $||(A - zI)^{-1}|| = \infty$.

Rešitev. Dokazovali bomo po naslednji poti $d) \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow d)$.

(i). Naj bo $A - zI = U\Sigma V^H$ singularni razcep $A - zI$, kjer je

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

Potem velja $(A - zI)^{-1} = V\Sigma^{-1}U^H$. Matrika $(A - zI)^{-1}$ ima tako po velikosti naslednje singularne vrednosti $\frac{1}{\sigma_n}, \ldots, \sigma_1$. Sklepamo lahko, da velja

$$\frac{1}{\epsilon} \leq ||(A - zI)^{-1}||_2 = ||V\Sigma^{-1}U^H||_2 = ||\Sigma^{-1}||_2 = \frac{1}{\sigma_n}$$

(ii). Naj bo $x = v_n$ singularni vektor $A - zI$, torej velja

$$(A - zI)v_i = \sigma_i u_i.$$

Iz česar sledi

$$||(A - zI)x||_2 = ||(A - zI)v_n||_2 = ||\sigma_n u_n||_2 = \sigma_n ||u_n||_2 = \sigma_n \leq \epsilon.$$

Poleg tega seveda velja $||x|| = ||v_n||_2 = 1$.

(iii). Vemo, da obstaja u, tako da velja $||(A - zI)u||_2 \leq \epsilon$ in $||u||_2 = 1$. Definirajmo $r := Au - zu$. Iščemo δA, da bo veljalo

$$(A + \delta A)u = zu \Longrightarrow \delta Au = zu - Au = -r.$$

Če definiramo $\delta A := -ru^H$, potem velja

$$\delta Au = -ru^H u = -r,$$

saj ima u normo 1. Poleg tega velja

$$||\delta A||_2 = ||-ru^H||_2 = ||r||_2||u||_2 = ||r||_2 \leq \epsilon.$$

Vemo, da je druga norma ru^T enaka največji singularni vrednosti. Singularne lastne vrednosti so ravno koreni lastnih vrednosti matrike $ur^H ru^H = (r^H r)uu^H$. Slika te matrike je razpeta z vektorjem u. Torej je to edini kandidat za lastni vektor pripadajoč neničelni lastni vrednosti. Očitno velja $(r^H r)uu^T u = r^H ru$. Torej je $r^H r$ edina neničelna lastna vrednost.

(iv). Izračunajmo,

$$(A + \delta A)u = zu, \quad \text{kjer je} \quad ||u||_2 = 1, ||\delta A|| \leq \epsilon$$

$$(A - zI) = -\delta Au$$

$$u = -(A - zI)^{-1}\delta Au$$

$$1 = ||u||_2 \leq ||(A - zI)^{-1}||_2||\delta A||_2||u||_2 \Longrightarrow ||(A - zI)^{-1}||_2 \geq \frac{1}{\epsilon}$$

■

Naloga 42 *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ in $m \geq n$. Prevedi računanje singularnega razcepa matrike $A = U\Sigma V^H$ na računanje singularnega racepa v realnem primeru. Pokaži, da ima dobljeni realni sistem dvojne singualrne vrednosti.*

Rešitev. Naj bosta u_i in v_i i-ta stolpca ortogonalnih matrik U in V. Matrika

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix}$$

ima na diagonali (realne) singularne vrednosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \ldots \geq \sigma_n$. Potem velja

$$Av_i = U\Sigma \underbrace{V^H v_i}_{e_i} = U\Sigma e_i = U\sigma_1 e_i = \sigma_i u_i.$$

Vidimo, da velja $Av = \sigma u$, kjer je $u = u_i$, $v = v_i$, $\sigma = \sigma_i$. Upoštevamo, da za kompleksno matriko A ter kompleksna vektorja velja:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + iA_2, \\ u &= u_1 + iu_2, \\ v &= v_1 + iv_2. \end{aligned}$$

Ker je σ realna dobimo

$$\begin{aligned} (A_1 + iA_2)(v_1 + iv_2) &= \sigma(u_1 + iu_2) \qquad (11) \\ A_1v_1 - A_2v_2 + i(A_1v_2 + A_2v_1) &= \sigma u_1 + i\sigma u_2 \\ A_1v_1 - A_2v_2 &= \sigma u_1 \text{ (realni del)} \\ A_1v_2 + A_2v_1 &= \sigma u_2 \text{ (imaginarni del).} \end{aligned}$$

Zadnji dve enačbi nam predstavljata realni bločni sistem

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Dobljeni sistem je dvakrat večji, pokazati moramo še, da so singularne vrednosti dvojne. Pomnožimo (11) z $-i$ in dobimo

$$\begin{aligned} (A_1 + iA_2)(v_1 + iv_2) &= \sigma(u_1 + iu_2) \;/ \cdot (-i) \\ A_1v_1 - A_2v_2 + i(A_1v_2 + A_2v_1) &= \sigma u_1 + i\sigma u_2 \;/ \cdot (-i) \\ -(A_1v_1 - A_2v_2)i + A_1v_2 + A_2v_1 &= -i\sigma u_1 + \sigma u_2 \\ A_1v_2 + A_2v_1 &= \sigma u_2 \text{ (realni del)} \\ A_2v_2 - A_1v_1 &= -\sigma u_1 \text{ (imaginarni del).} \end{aligned}$$

Torej velja

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{bmatrix}.$$

Našli smo še drugi levi singularni vektor $\begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{bmatrix}$. ∎

Naloga 43 *Naj bo* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}$, *kjer je* $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *in* $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$. *Singularne vrednosti matrike* A *so* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. *Singularne vredosti matrike* A_1 *so* $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \ldots \geq \tau_m \geq 0$. *Pokaži, da velja* $\sigma_j \geq \tau_j \geq \sigma_{j+n-m}$ *Pomagaj si s Cauchyjevim izrekom o prepletanju lastnih vrednosti.*

Rešitev. Vemo, da so singularne lastne vrednosti matrike B, ravno koreni lastnih vrednosti matrike $B^T B$, $\sigma_i(B) = \sqrt{\lambda_i(B^T B)}$. Označimo matriko $A^T A$ z C. Velja

$$C = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T A_1 & A_1^T A_2 \\ A_2^T A_1 & A_2^T A_2 \end{bmatrix}.$$

Torej je zadosti pokazati

$$\lambda_j(C) \geq \lambda_j(C_m) \geq \lambda_{j+n-m}(C),$$

kjer je $C_m = A_1^T A_1$. Po Cauchyjevem izreku sledi

$$\lambda_j(C) \geq \lambda_j(C_{n-1}) \geq \lambda_{j+1}(C).$$

Če izrek uporabimo še za C_{n-1}, dobimo

$$\lambda_j(C) \geq \lambda_j(C_{n-1}) \geq \lambda_j(C_{n-2}) \geq \lambda_{j+1}(C_{n-1}) \geq \lambda_{j+2}(B).$$

Po $n - m$ zaporednih uporabah izreka za $C, C_{n-1}, \ldots, C_{m+1}$ dobimo

$$\lambda_j(C) \geq \lambda_j(C_m) \geq \lambda_{j+n-m}(C).$$

Trditev bi v resnici morali pokazati z indukcijo, kjer je indukcijska predpostavka

$$\lambda_j(C) \geq \lambda_{j-k}(C_{n-k}) \geq \lambda_{j+k}(C).$$

∎

Naloga 44 *Naj bo* B *poševno hermitska matrika. Pokaži, da za matriko*

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^H & I \end{bmatrix}$$

velja $\kappa_2(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2 = \frac{1+||B||_2}{1-||B||_2}$.

Rešitev. Matrika A je simetrična in tudi pozitivno definitna, tako so lastne vrednosti kar enake singularnim vrednostim. Velja namreč

$$\begin{bmatrix} x^H & y^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B \\ B^H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^H x + y^H y$$

Spomnimo se še, da je druga norma matrike ravno enaka največji singularni vrednosti. Poizkusimo izračunati lastne vektorje in vrednosti.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B \\ B^H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + By \\ B^H x + y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Dobili smo sistem

$$\begin{aligned} x + By &= \lambda x \\ B^H x + y &= \lambda y \end{aligned}$$

Tako iz prve enačbe dobimo $x = By/(\lambda - 1)$. Vstavimo v drugo:

$$B^H By/(\lambda - 1) + y = \lambda y \Leftrightarrow B^H By = (\lambda - 1)^2 y$$

To pomeni, da velja $(\lambda - 1)^2 = \sigma_1^2 \to \lambda_1 = 1 + \sigma_1, \lambda_n = 1 - \sigma_n$. ■

Naloga 45 *Za simetrično in pozitivno definitno matriko A definiramo nestandardno pogojenostno število*

$$K(A) = \frac{\frac{1}{n}\operatorname{tr}(A)}{\det(A)^{\frac{1}{n}}}.$$

Pokaži, da velja

$$1 \leq K(A) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_n} = \kappa_2(A),$$

kjer so $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A.

Rešitev. Najprej pokažimo levo neenakost. Ker je A spd matrika, so lastne vrednosti enake singularnim vrednostim. Torej je $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \prod_{i=1}^n \sigma_i$, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i$. Dokazati je potrebno: $\left(\prod_{i=1}^n \sigma_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i$. To pa velja po izreku o aritmetični in geometrijski sredini.

Druga neenakost dobimo kot:

$$\frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i\right)}{\left(\prod_{i=1}^n \sigma_i\right)^{1/n}} \leq \frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i\right)}{\sigma_n} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

■

Naloga 46 *Pokaži, da za kompleksno matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, obstaja* ***polarna dekompozicija***

$$A = U \cdot P,$$

kjer je U unitarna matrika in P hermitska pozitivno semidifinitna matrika. Pomagaj si s singularnim razcepom $A = U_1 \Sigma V_1^*$ matrike. Pokaži, da je za obrnljivo matriko A ta razcep enoličen.

Rešitev. Izračunajmo

$$A^*A = P^* \overbrace{U_1^* U_1}^{I} P = P^*P = (U_1 \Sigma V_1^*)^* U_1 \Sigma V_1^* = V_1 \Sigma U_1^* U_1 \Sigma V_1^* = V_1 \Sigma^2 V_1^*,$$

torej poizkusimo z $P = V_1 \Sigma V_1^*$, ki je očitno hermitska pozitivno semidefinitna matrika, saj so vse lastne vrednosti večje ali enake 0. Določimo še možno izbiro za U,

$$A = U_1 \Sigma V_1^* = UP = UV_1 \Sigma V_1^*,$$

torej lahko definiramo $U = U_1 V_1^*$.

Pokažimo samo še enoličnost v primeru obrnljive matrike A. Recimo, da velja

$$\begin{aligned} U_1 P_1 &= U_2 P_2 \\ P_1 &= U_1^H U_2 P_2 \end{aligned}$$

Matrika P_1 je pozitivno definitna, saj nobena singularna vrednost ni enaka 0. Tako se lastne vrednosti in singularne vrednosti ujemajo. Poleg tega so levi in desni singularni vektorji enaki lastnim vektorjem matrike. Naj bo Q_1 matrika sestavljena iz levih lastnih vektorjev matrike P_1. Matrika Λ_1 je diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi P_1 na diagonali. Potem velja

$$Q_1^H P_1 = Q_1^H \Lambda_1 = (Q_1^H U_1^H U_2) P_2.$$

Iz enakost levih in desnih singularnih vektorjev P_2 sledi $Q_1^H = Q_1^H U_1^H U_2$. Kar pomeni $U_1^H U_2 = I$, oziroma $U_1 = U_2$. ∎

Naloga 47 *Neničelni projektor se da zapisati v obliki*

$$P = UU^H,$$

kjer je U $m \times n$ matrika, $m \geq n$, z ortogonalnimi stolpci. Trivialno je videti, da je P simetrična in idempotentna

$$P = P^H, \quad P = P^2.$$

Pokaži obrat zgornje trditve. Vsaka simetrična idempotentna matrika je projektor. Pomagaj si z singularnim razcepom.

Rešitev. Naj bo n rang matrike P, dimenzije $m \times m$, to je dimenzija prostora na katerega projiciramo.

Zapišimo singularni razcep matrike P, kjer je v Σ_1, dimenzije $n \times n$, zbranih vseh n neničelnih singularnih vrednosti P :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m-n \end{array} \\ m & \left[\begin{array}{cc} U_1 & U_2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m-n \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ m-n \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{cc} & m \\ \begin{array}{c} n \\ m-n \end{array} & \left[\begin{array}{c} V_1^H \\ V_2^H \end{array}\right] \end{array} = U_1 \Sigma_1 V_1^H.$$

Stolpci $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ sestavljajo bazo za sliko matrike A, stolpci $V_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ sestavljajo bazo za sliko A^H.

$$\begin{aligned} (U_1 \Sigma_1 V_1^H)^H &= V_1 \Sigma_1 U_1^H \\ (U_1 \Sigma_1 V_1^H)^2 = \left(U_1 \Sigma_1 V_1^H\right)\left(V_1 \Sigma_1 U_1^H\right) = U_1 \Sigma_1^2 U_1^H &= U_1 \Sigma_1 V_1^H \iff V_1 = U_1 \Sigma_1 \\ V_1^H V_1 = I_m = (U_1 \Sigma_1)^H (U_1 \Sigma_1) = \Sigma_1^H U_1^H U_1 \Sigma_1 &= \Sigma_1^2 = I_m. \end{aligned}$$

∎

Naloga 48 *Dana je matrika A reda $m \times n$. Matriko B dobimo tako, da matriko A zarotiramo za $90°$ v smeri urinega kazalca. Na 3×2 matriki to izgleda takole*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \end{bmatrix}.$$

Ali imata A in B enake singularne vredosti? Dokaži ali poišči protiprimer.

Rešitev. Podrobnosti dokaza prepuščam bralcu. Glavni korak dokaza je, da opišemo našo preslikavo kot:

$$A \mapsto A^T \mapsto A^T J_m,$$

kjer je

$$J_m = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \iddots & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

matrika, ki naredi naslednjo permutacijo stolpcev, obrne vrstni red stolpcev,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na koncu upoštevamo še definicijo $\sigma_i(A) = \lambda_i(A^H A) = \lambda_i(AA^H)$. ∎

Naloga 49 *Dokaži, da za matriko X z najmanjšo normo $||X||_G$ inducirano s skalarnim produktom definiranim za pozitivno definitno matriko G, $\langle x, y\rangle = x^H G y$, ki minimizira $||AX - B||_G$ velja $X = A^+ B$.*

Rešitev. Najprej izračunamo:

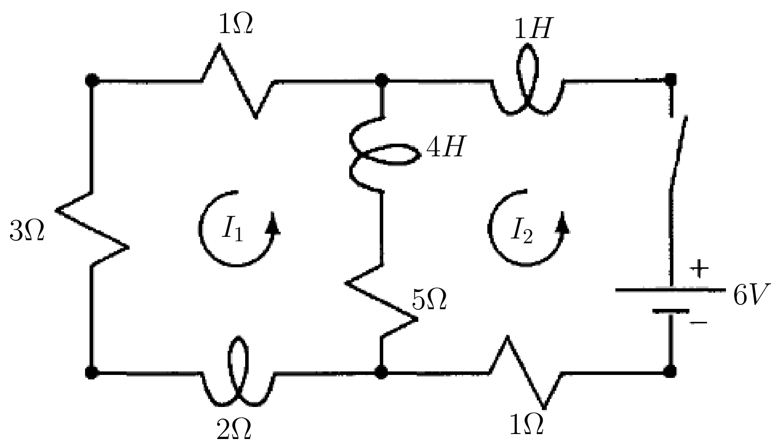
$$||A||_G = \max_{||x||_G=1} ||Ax||_G = \max_{x^T G x=1} \sqrt{x^T A^T G A x} = \max_{x^T V^T V x=1} \sqrt{x^T A^T V^T V A x}$$
$$\overset{y=Vx}{\widehat{\Rightarrow}} \max_{y^T y=1} \sqrt{y^T V^{-T} A^T V^T V A V^{-1} y} = ||VAV^{-1} y||_2$$

Zdaj lahko poračunamo

$$||AX - B||_G = ||VAXV^{-1} - VBV^{-1}||_2 = ||VAV^{-1}VXV^{-1} - VBV^{-1}||_2$$

Torej je matrika VXV^{-1} z najmanjšo drugo normo, oziroma $||VXV^{-1}||_2 = ||X||_G$, enaka ravno $VXV^{-1} = \left(VAV^{-1}\right)^+ VBV^{-1} = VA^+V^{-1}VBV^{-1} = VA^+BV^{-1}$. Upoštevali smo lastnost psevdoinverza $(VAV^{-1})^+ = (V^{-1})^+ A^+ V^+ = VA^+V^{-1}$. Tako dobimo $X = A^+B$. ∎

Naloga 50 *Podano je vezje na spodnji sliki:*



Napiši sistem diferencialnih enačb in s pomočjo Kirchoffovih zakonov poišči rešitev sistema. Vse skupaj na koncu prevedi na reševanje posplošenega problema lastnih vrednosti.

Najprej zapišemo enačbo, ki jo dobimo z upoštevanjem, da je padec napetosti po krožni zanki enak 0. Čez srednji upor teče tok $I_1 - I_2$.

$$5(I_1 - I_2) + 4(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + I_1 + 3I_1 + 2\dot{I}_1 = 0$$

Podobno dobimo enačbo iz druge krožne zanke, kjer upoštevamo še, da gremo čez vir napetosti $U = 6V$.

$$I_2 + \dot{I}_2 + 4(\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + 5(I_2 - I_1) = 6$$

Sistem prepišemo v matrično obliko:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}}^{A} \dot{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}} = \overbrace{\begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}}^{B} \overbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}}^{I} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Homogeni del predstavlja rešitev sistema $A\dot{I} = BI$. Rešitev je seveda matrična funkcija

$$I(t) = e^{A^{-1}Bt} I_0.$$

Za izračun te funkcije potrebujemo lastne vrednosti in vektorje posplošenega problema lastnih vrednosti $BI = \lambda AI$. To najlažje izračunamo v Matlabu z ukazom `[V, lambda] = eig(B, A)`. Splošno rešitev homogenega dela lahko zdaj zapišemo kot:

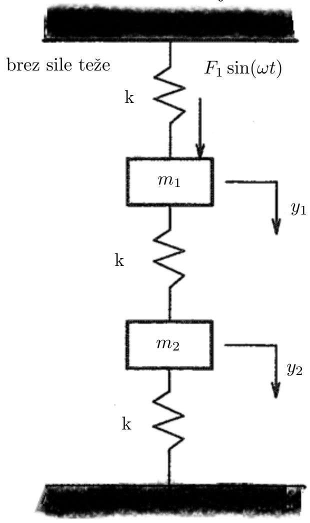
$$I(t) = Ve^{\text{lambda}\cdot t} I_0 = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t},$$

kjer je $I_0 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix}^T$. Partikularna rešitev sistema predstavlja stacionarno stanje, rešitev sistema: $BI_p = \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix}^T$. Splošna rešitev je oblike:

$$I(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + I_p$$

Začetna tokova c_1 in c_2 določimo iz pogoja $I(0) = 0$.

Naloga 51 *Podan je sistem na sliki, kjer prvo utež periodično vzbujamo. Pokaži, da v primeru, ko se frekvenca vzbujanja približa kateri izmed lastnih frekvenc,*



amplituda nihanja poljubno naraste.

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1 &= -k(y_1 - y_2) - ky_1 + F_1 \sin(\omega t) \\
m_2\ddot{y}_2 &= k(y_1 - y_2) - ky_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1 &= -2ky_1 + ky_2 + F_1 \sin(\omega t) \\
m_2\ddot{y}_2 &= ky_1 - 2ky_2
\end{aligned}
$$

Vse skupaj zapišemo v matrični obliki:

$$
\overbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}^{M} \overbrace{\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}}^{\ddot{Y}} = \overbrace{\begin{bmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{bmatrix}}^{K} \overbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}^{Y} + \overbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{F} \sin(\omega t)
$$

Kar na kratko zapišemo kot $M\ddot{Y} = KY + F\sin(\omega t)$. Sistem bomo prevedli na sistem diferencialnih enačb prvega reda. Zapišemo lahko

$$
\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \overbrace{\dot{\begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{bmatrix}}}^{\dot{Z}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ K & 0 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{bmatrix}}^{Z} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \sin(\omega t)
$$

Zdaj lahko postopamo kot pri pri prejšnji nalogi. Za rešitev homogenega dela je potrebno poiskati lastne vrednosti in vektorje posplošenega problema lastnih vrednosti:

$$
\begin{bmatrix} 0 & I \\ K & 0 \end{bmatrix} Z = \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} Z
$$

Ugotovili bomo, da so lastne vrednosti problema iste kot lastne vrednosti posplošenega problema $Kx = \lambda^2 Mx$.

$$
\begin{vmatrix} -\lambda I & I \\ K & -\lambda M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & I \\ K - \lambda^2 M & 0 \end{vmatrix} = \pm \left| K - \lambda^2 M \right|
$$

Zapišimo še po blokih:

$$\begin{bmatrix} -\lambda I & I \\ K & -\lambda M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda Z_1 + \lambda Z_2 \\ K Z_1 - \lambda M Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iz česar dobimo $Z_2 = \lambda Z_1$ in $K Z_2 = \lambda^2 Z_2$. Torej so tudi lastni vektorji obeh problemov povezani. Splošna rešitev homogenega dela je tako $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} [a_i \sin(\lambda_i t) + b_i \cos(\lambda_i t)]\, v_i$, kjer so (λ_i, v_i) pari lastnih vrednosti in vektorjev posplošenega problema lastnih vrednosti $Kx = \lambda^2 x$.

Poiščimo še partikularno rešitev, dobimo jo tako, da uporabimo nastavek

$$Y = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \sin(\omega t)$$

To vstavimo v enačbo, pokrajšamo s $\sin(\omega t)$ in izračunamo:

$$-\omega^2 M \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (K - \omega^2 M) \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iz česar že vidimo, da bo amplituda nihanja, ko se frekvenca bliža lastni frekvenci sistema, poljubno velika.

Sledijo zgledi v Matlabu.