Izpit iz Optimizacije 1

3. 2. 2014

1. Za podmnožico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A) &= \{c \in \mathbb{R}^n \mid \text{linearni funkcional } f_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f_c(x) = \langle c, x\rangle, \\ &\quad \text{je na množici } A \text{ navzgor omejen}\}.\end{aligned}$$

(a) Določi $\mathcal{F}(A)$ za $A = [-1, \infty) \times [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Dokaži: če je A konveksna, je $\mathcal{F}(A)$ konveksna.

(c) Dokaži: če je A polieder, je $\mathcal{F}(A)$ polieder. (Nasvet: zapiši A v standardni obliki.)

Rešitev: (a) Dokažimo, da je $\mathcal{F}(A) = (-\infty, 0]^2$. Naj bo najprej $c = (c_1, c_2) \in (-\infty, 0]^2$. Potem za vsak $x = (x_1, x_2) \in A$ velja $f_c(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \le c_1x_1 \le -c_1$. Torej je $f_c \in \mathcal{F}(A)$. Obratno, naj bo $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, da velja $f_c(x) \le M$ za nek M, za poljuben $x \in A$. Torej je $f_c(x, 0) = c_1x \le M$ za poljuben $x \ge 0$ in zato $c_1 \le 0$. Podobno je $f_c(0, x) = c_2x \le M$ za poljuben $x \ge 0$ in zato $c_2 \le 0$. Sledi $c \in (-\infty, 0]^2$.

(b) Naj bo $c_1, c_2 \in \mathcal{F}(A)$ in $\lambda \in (0, 1)$. Izberimo $M \in \mathbb{R}$, da je $f_{c_1}(A) \subseteq (-\infty, M]$ in $f_{c_2}(A) \subseteq (-\infty, M]$. Potem za poljuben $x \in A$ velja $f_{\lambda c_1+(1-\lambda)c_2}(x) = \langle \lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2, x\rangle = \lambda\langle c_1, x\rangle + (1 - \lambda)\langle c_2, x\rangle = \lambda f_{c_1}(x) + (1 - \lambda)f_{c_2}(x) \le \lambda M + (1 - \lambda)M = M$. Torej je $\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2 \in \mathcal{F}(A)$ in je zato $\mathcal{F}(A)$ konveksna.

(c) Pišimo

$$A = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j s_j + \sum_{k=1}^{r} \nu_k z_k \mid \lambda_i, \mu_j \ge 0,\ \sum \lambda_i = 1,\ \nu_k \in \mathbb{R}\}.$$

Potem je $\mathcal{F}(A) = \{c \in \mathbb{R}^n \mid f_c(s_j) \le 0 \text{ in } f_c(z_k) = 0 \text{ za vsak } j, k\}$. Res, če je $c \in \mathcal{F}(A)$ (torej $f_c(A) \subseteq (-\infty, M]$ za nek M), potem je $f_c(v_1 + \mu_j s_j) = f_c(v_1) + \mu_j f_c(s_j) \le M$ za vsak $\mu_j \ge 0$, in zato $f_c(s_j) \le 0$. Podobno je $f_c(v_1+\nu_k z_k) = f_c(v_1)+\nu_k f_c(z_k) \le M$ za vsak $\nu_k \in \mathbb{R}$ in zato $f_c(z_k) = 0$. Obratno, če je $f_c(s_j) \le 0$ za vsak j in $f_c(z_k) = 0$ za vsak k, je $f_c(\sum \lambda_i v_i + \sum \mu_j s_j + \sum \nu_k z_k) = \sum \lambda_i f_c(v_i) + \sum \mu_j f_c(s_j) \le \sum \lambda_i f_c(v_i) \le \max_i f_c(v_i)$, torej $c \in \mathcal{F}(A)$.

Torej je $\mathcal{F}(A) = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, s_j\rangle \le 0 \text{ in } \langle c, z_k\rangle = 0 \text{ za vsak } j, k\}$, to pa je očitno polieder, saj je presek polprostorov.

2. Z dvofazno simpleksno metodo poišči maksimum funkcionala $z = -x_2 + x_3 - 4x_4$ pri pogojih $2x_1 - 2x_2 \ge 1$, $x_3 - 3x_4 \le 2$, $x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge 0$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$. Poišči še kakšno točko, v kateri je maksimum dosežen.

Rešitev: Maksimum je $z = 2$, dosežen v točkah $(a, 0, 2, 0)$, $a \ge \frac{1}{2}$.

3. S pomočjo dualnega dopolnjevanja dokaži, da je $x^* = (0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ optimalna strategija za prvega igralca za naslednjo matrično igro:

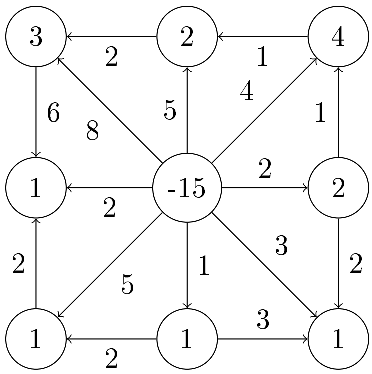
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Izračunaj še vrednost igre in poišči kakšno optimalno strategijo za drugega igralca.

Rešitev: Problem prevedemo na linearni program Π za spremenljivke x_1, x_2, x_3, x_4, s. V točki x^* dobimo pogoj $s \leq 0$. Ker iščemo maksimum funkcionala s, je potem $s = 0$, torej dokazujemo, da je $(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ optimalna rešitev tega linearnega programa. Najprej preverimo, da je dopustna. S pomočjo dualnega dopolnjevanja vidimo, da mora rešitev dualnega programa (y_1, y_2, t) zadoščati $3y_1 = 2y_2$, torej je edini kandidat $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0)$. Hitro se prepričamo, da je ta rešitev dopustna. Vrednost funkcionala t v tej točki enaka vrednosti funkcionala s v točki $(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, torej sta po šibkem izreku o dualnosti ti dve rešitvi res optimalni.

Vrednost igre je torej 0, optimalna strategija za 2. igralca pa $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$.

4. S pomočjo simpleksne metode na omrežjih poišči najcenejši razvoz na spodnjem omrežju. Začetni razvoz naj bo "zvezda" (razvoz po povezavah iz središča neposredno do vseh ostalih točk).



Rešitev: