1. kolokvij iz Optimizacije 1 – Rešitve

25. 11. 2013

1. Jeklo dobavljamo na dve prodajni mesti P1 in P2 iz dveh skladišč S1 in S2. Stroški transporta za tono jekla so podani v naslednji tabeli (v EUR):

	P1	P2
S1	6	8
S2	9	6

V skladišču S1 imamo na voljo 16 ton, v skladišču S2 pa 20 ton jekla. Na prodajnem mestu P1 potrebujemo vsaj 10 ton, na prodajnem mestu P2 pa vsaj 15 ton, skupaj na obeh prodajnih mestih pa vsaj 30 ton jekla. Razlika med količinama dobavljenega jekla v P1 in P2 ne sme znašati več kot 2.5 tone. Prevoz od S1 do P1 ne sme biti večji od 7.5 ton.

Kako naj razvozimo jeklo na obe prodajni mesti, da bodo stroški razvoza čim manjši?

Zapiši ta problem v obliki linearnega programa. (Problema ni potrebno rešiti.) [25]

Rešitev: Označimo z x_{ij}, $i, j \in \{1, 2\}$, spremenljivko, ki označuje število dostavljenih ton iz skladišča Si do prodajnega mesta Pj. Linearni program je potem naslednji:

$$\begin{array}{rcl} \text{minimiziraj } 6x_{11} + 8x_{12} + 9x_{21} + 6x_{22} & \text{pri} & \text{pogojih} \\ x_{11} + x_{12} & \leq & 16 \\ x_{21} + x_{22} & \leq & 20 \\ x_{11} + x_{21} & \geq & 10 \\ x_{12} + x_{22} & \geq & 15 \\ x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} & \geq & 30 \\ x_{11} + x_{21} & \leq & x_{12} + x_{22} + 2.5 \\ x_{12} + x_{22} & \leq & x_{11} + x_{21} + 2.5 \\ x_{11} & \leq & 7.5 \\ x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} & \geq & 0 \end{array}$$

(Po želji lahko "minimiziraj $6x_{11} + 8x_{12} + 9x_{21} + 6x_{22}$" spremenimo v "maksimiziraj $-6x_{11} - 8x_{12} - 9x_{21} - 6x_{22}$".)

2. V prostoru je dan polieder $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x + z \geq 0,\ 2x - 2y - z \geq -2,\ x, y \geq 0\}$. Zapiši K v standardni obliki. [25]

   Rešitev: $K = \{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{3} \mu_i s_i |\ \lambda_i, \mu_i \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1\}$, kjer je $v_1 = (0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 2)$, $s_1 = (1, 2, -2)$, $s_2 = (1, 0, -2)$, $s_3 = (1, 0, 2)$.

3. S pomočjo dvofazne simpleksne metode poišči maksimum funkcionala $z = -x_1 + 3x_2 - 7x_3$ pri pogojih $x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2$, $x_2 - x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Poišči vsaj eno točko, v kateri je maksimum dosežen. [30]

   Rešitev: $z = -2$ v točki $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 0$

4. Naj bo M podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in $x, y \in \mathbb{R}^n$ dve različni točki. Pokaži: če velja $x \in \mathcal{C}(M \cup \{y\})$ in $y \in \mathcal{C}(M \cup \{x\})$, potem je $x, y \in \mathcal{C}(M)$. [20]

Rešitev: Po predpostavki velja $x = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i a_i + \lambda_m y$ in $y = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j b_j + \mu_n x$ za neke $a_i, b_j \in M$ in $\lambda_i, \mu_j \geq 0$, $\sum \lambda_i = \sum \mu_j = 1$. Vstavimo drugo enakost v prvo in dobimo $x = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_m \mu_j b_j + \lambda_m \mu_n x$, torej

$$(1 - \lambda_m \mu_n) x = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_m \mu_j b_j. \ (*)$$

Velja $1 - \lambda_m \mu_n \neq 0$. Res, v nasprotnem primeru bi bilo $\lambda_m = \mu_n = 1$, torej bi bilo $\lambda_i = \mu_j = 0$ za vse $i < m$ in $j < n$. Odtod bi sledilo $x = y$, kar je protislovje. Zato smemo enakost $(*)$ deliti z $1 - \lambda_m \mu_n$, od koder dobimo željeno konveksno kombinacijo za x. Torej velja $x \in \mathcal{C}(M)$. Po simetriji pa je tudi $y \in \mathcal{C}(M)$.