2. kolokvij iz Optimizacije 1 – Rešitve

27. 1. 2014

1. S pomočjo izreka o dualnem dopolnjevanju preveri, ali je $x^* = (0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ optimalna rešitev naslednjega linearnega programa:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{max.} & 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 & \text{pri} & \text{pogojih} \\
& -8x_2 + 2x_3 & \leq & -19 \\
& 3x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 4 \\
& -x_1 - 5x_3 & \leq & -2 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq & 7 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Rešitev: S pomočjo dualnega dopolnjevanja dobimo rešitve dualnega programa $y^* = (y_1, 4 - 18y_1, 0, 13y_1 - 1)$, kjer je $y_1 \in [\frac{1}{13}, \frac{5}{28}]$. Torej je x^* optimalna rešitev začetnega problema.

2. Igralca A in B igrata naslednjo igro. Najprej vsak od njiju izbere neko število iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nato povesta vsak svojo izbiro. Denimo, da je A izbral a, B pa b. Če je $|a - b| \leq 1$, plača igralec B igralcu A en evro. Če je $a - b \geq 2$, plača igralec A igralcu B en evro. Če pa je $a - b \leq -2$, pa igra ostane neodločena.

   (a) Zapiši zgornjo igro v obliki matrične igre. (Poišči pripadajočo plačilno matriko.)

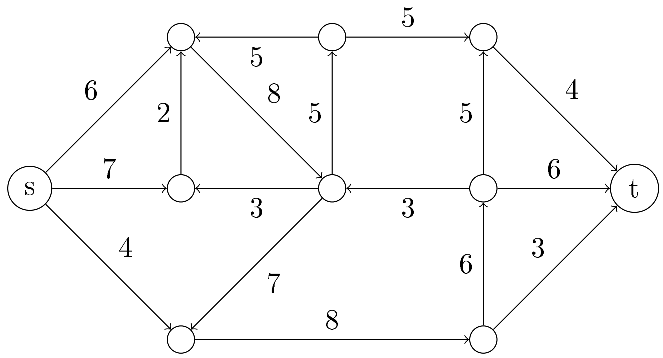
   (b) Določi vrednost igre in optimalno strategijo za igralca A.

   Rešitev:

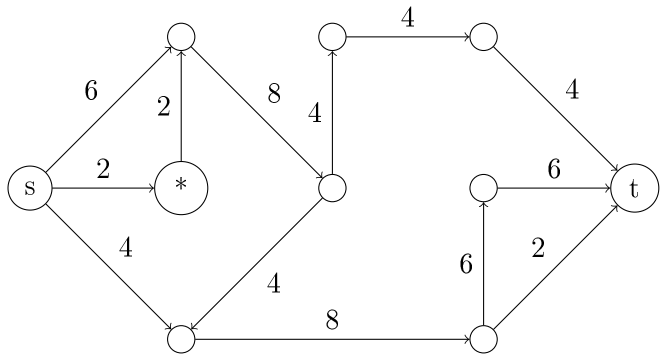
   (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Z dominacijo prevedemo problem na linearni program s tremi spremenljivkami, npr. x_2, x_4, s. Dobimo optimalno rešitev $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_4 = \frac{1}{3}$, $s = \frac{1}{3}$. Optimalna strategija je potem $(0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0)$, vrednost igre pa $\frac{1}{3}$.

3. S Ford-Fulkersonovim algoritmom poišči največji pretok v naslednjem omrežju in določi njegovo vrednost. Poišči še prerez (A, B) z najmanjšo prepustnostjo.



Rešitev: Maksimalni pretok (ena od možnosti):



Vrednost pretoka je 12. Prerez (A, B) z minimalno prepustnostjo pa je $A = \{s, *\}$, $B = V(G) \setminus A$.

4. Poišči razporeditev 4 opravil med 3 izvajalce, pri čemer mora en izvajalec opraviti 2 opravili, ostala dva morata opraviti vsak po eno opravilo, skupni stroški pa naj bodo čim manjši. Cene opravil po posameznih izvajalcih so podane v spodnji tabeli:

izv.\opr.	A	B	C	D
1.	6	9	14	8
2.	3	8	12	12
3.	7	4	11	5

Rešitev: Možnih je več načinov reševanja. Eden od načinov je naslednji: Izvajalcem 1, 2, 3 dodamo izvajalca 4, ki vsakega od opravil opravi po ceni, ki je minimum cen vseh treh izvajalcev. Dobimo cenik:

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & 14 & 8 \\ 3 & 8 & 12 & 12 \\ 7 & 4 & 11 & 5 \\ 3 & 4 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

Dobimo več rešitev, npr. izvajalec 1 opravlja D, 2 opravlja A, 3 pa opravlja B in C. Skupna cena je 26.