Linearno programiranje (LP)

24.10.2013

Zapisali smo ***linearni program v standardni obliki:***

Podatki: $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$

Iščemo: $\max\langle c, x\rangle$
pri pogojih: $Ax \leq b$, $x \geq 0$

Tu je $x \in R^n$.

Če je $n \leq 2$, lahko LP rešimo grafično.

Opisali smo reševanje LP s **simpleksno metodo**.

S pomočjo *dopolnilnih spremenljivk* sistem linearnih neenačb spremenimo v sistem linearnih enačb ali *slovar,* ki ima na levi strani v vsaki vrstici eno samo spremenljivko (v vsaki vrstici drugo). Spremenljivke, ki nastopajo na levi strani slovarja, imenujemo *bazne spremenljivke*, vse druge pa *nebazne spremenljivke.* Slovar vrednosti baznih spremenljivk (pa tudi namenske funkcije oziroma *funkcionala*) izraža (ali: *prevaja*) z vrednostmi nebaznih spremenljivk. Množico vseh baznih spremenljivk slovarja S imenujemo *baza* slovarja S. Na začetku za bazne spremenljivke vzamemo dopolnilne spremenljivke, prvotne spremenljivke pa so nebazne. Na nadaljnjih korakih simpleksne metode bazo in s tem tudi slovar spreminjamo. Pri tem pa se množica vseh rešitev slovarja ne spreminja (z drugimi besedami: vsi slovarji so med seboj ekvivalentni).

Definicija. Slovar S je *dopusten,* če so vsi prosti členi na desni strani nenegativni.

Dopustna rešitev x je *bazna dopustna rešitev (bdr),* če obstaja dopusten slovar, tako da velja:

1. vrednosti nebaznih spremenljivk v x so 0,

2. vrednosti baznih spremenljivk v x so enake ustreznim prostim členom na desni strani slovarja.

Vsakemu dopustnemu slovarju torej ustreza enolična bdr. Na vsakem koraku simpleksne metode skušamo trenutno bdr izboljšati s spremembo slovarja, pri kateri:

- ena od nebaznih spremenljivk vstopi v bazo,
- ena od baznih spremenljivk zapusti bazo.

Za *vstopajočo spremenljivko* lahko izberemo katerokoli spremenljivko, ki ima v funkcionalu pozitiven koeficient. Vrednosti vstopajoče spremenljivke običajno ne moremo poljubno povečati, saj nas pri tem omejujejo pogoji nenegativnosti baznih spremenljivk. Za *izstopajočo spremenljivko* vzamemo tisto, ki to povečanje najbolj omejuje. Enačbo, ki v starem slovarju izraža izstopajočo spremenljivko, imenujemo *pivotna enačba*. Iz nje izrazimo vstopajočo spremenljivko, ki jo nato v vseh drugih enačbah slovarja in tudi v funkcionalu nadomestimo z dobljenim izrazom. Tako smo dobili nov slovar, ki mu ustreza nova bazna dopustna rešitev.

To ponavljamo, dokler v funkcionalu nobena spremenljivka nima več pozitivnega koeficienta.

Izrek. *Če v funkcionalu nobena spremenljivka nima pozitivnega koeficienta, je trenutna bdr optimalna.*

7.11.2013

Delovanje simpleksne metode smo si ogledali na zgledu proizvodnega problema (kmet se odloča, koliko hektarov zemlje bo namenil posameznim poljščinam, da bo njegov čisti dobiček največji)

Pokazali smo tudi, kako lahko s pomočjo zadnjega slovarja pri simpleksni metodi poiščemo vse optimalne rešitve linearnega programa.

Dokazali smo, da sta tako množica dopustnih rešitev kot tudi množica optimalnih rešitev linearnega programa konveksna poliedra.

14.11.2013

Definicija. Bazna spremenljivka je *izrojena*, če ima vrednost nič. Bazna dopustna rešitev je *izrojena*, če vsebuje ustrezna baza kakšno izrojeno spremenljivko.

Ugotovili smo, da se pri simpleksni metodi vrednost funkcionala na nobenem koraku ne zmanjša. Nespremenjena pa lahko ostane le, kadar je trenutna bdr izrojena.

Vprašanje. Kaj če na nekem koraku simpleksne metode ne moremo izbrati izstopajoče spremenljivke?

Trditev. *Če nobena bazna spremenljivka ne omejuje povečanja vstopajoče spremenljivke, je linearni program neomejen.*

Vprašanje. Kako poiščemo začetni dopustni slovar, kadar desna stran b ni nenegativna?

Dvofazna simpleksna metoda

V I. fazi poiščemo začetni dopustni slovar, v II. fazi pa nadaljujemo z običajnim simpleksnim postopkom.

I. faza:

Rešujemo pomožni LP, ki ga dobimo iz prvotnega tako, da desnim stranem neenačb prištejemo *umetno spremenljivko* x_0 in sestavimo slovar, za funkcional pa vzamemo $-x_0$. Na 1. koraku I. faze v bazo vključimo spremenljivko x_0, iz nje pa odstranimo spremenljivko z najmanjšo vrednostjo. Nato nadaljujemo po običajni simpleksni metodi. Pokazali smo, da ima prvotni LP dopustno rešitev natanko tedaj, ko je optimalna vrednost pomožnega LP enaka 0.

Dogovor o ravnanju v I. fazi:

1. Umetno spremenljivko x_0 odstranimo iz baze, brž ko je to mogoče.
2. Če vrednost funkcionala postane enaka 0, končamo.

Če se držimo tega dogovora, ob koncu I. faze lahko nastopi le ena od naslednjih dveh možnosti:

a) *Optimalna vrednost I. faze je različna od 0*: V tem primeru je prvotni LP nedopusten.

b) *Optimalna vrednost I. faze je enaka 0 in umetna spremenljivka x_0 ni v bazi*: Začnemo z II. fazo reševanja. Vse člene s spremenljivko x_0 odstranimo iz slovarja in funkcional nadomestimo s prvotnim funkcionalom, v katerem vse bazne spremenljivke s pomočjo slovarja izrazimo z nebaznimi. Tako dobimo začetni dopustni slovar za prvotni LP. Nadaljujemo po običajni simpleksni metodi.

20. 11. 2013

Končnost postopka

Ugotovili smo, da lahko simpleksni postopek teče v neskončnost le, če pride do cikličnega ponavljanja slovarjev. Dokazali smo, da to lahko preprečimo z ***Blandovim pravilom*** ali *pravilom najmanjšega indeksa*, ki pravi, da se v primeru, ko imamo pri izbiri vstopajoče in/ali izstopajoče spremenljivke na razpolago več možnosti, vselej odločimo za spremenljivko z najmanjšim indeksom.

S tem smo zaključili obravnavo simpleksne metode.

Linearni program v splošni obliki smo definirali kot optimizacijsko nalogo, pri kateri iščemo ekstrem linearnega funkcionala pri linearnih pogojih, ki so lahko enačbe ali neenačbe. Pokazali smo, kako ga lahko prevedemo na enakovreden program v standardni obliki.

Osnovni izrek linearnega programiranja. *Za LP Π veljajo naslednje trditve:*

1. *če ima Π dopustno rešitev, ima tudi bazno dopustno rešitev,*
2. *če ima Π optimalno rešitev, ima tudi bazno optimalno rešitev,*
3. *Π je bodisi nedopusten bodisi neomejen bodisi ima optimalno rešitev.*

27. 11. 2013

Dualnost v linearnem programiranju

Definirali smo ***dualni program*** linearnega programa v standardni obliki in pokazali, da je dual dualnega programa enakovreden prvotnemu programu.

Dokazali smo ***šibki izrek o dualnosti***, ki pravi: *Vrednost vsake dopustne rešitve prvotnega programa je kvečjemu manjša od vrednosti katerekoli dopustne rešitve dualnega programa.*

Dokazali smo ***krepki izrek o dualnosti***, ki pravi: *Če ima prvotni program optimalno rešitev, jo ima tudi dualni program, njuni vrednosti pa sta enaki.*

Pri dokazu smo ugotovili, da je vektor nasprotnih vrednosti koeficientov pri dopolnilnih spremenljivkah v zadnjem funkcionalu pri reševanju prvotnega programa s simpleksno metodo optimalna rešitev dualnega programa.

Pokazali smo, da od devetih možnih kombinacij lastnosti (nedopustnost, neomejenost, obstoj optimalnih rešitev) prvotnega in dualnega programa v resnici lahko nastopijo le štiri (oziroma tri, če upoštevamo simetričnost prvotnega in dualnega programa): bodisi sta oba programa nedopustna bodisi je eden od njiju nedopusten, drugi pa neomejen, bodisi ima vsak od njiju optimalno rešitev.

Dokazali smo ***izrek o dualnem dopolnjevanju (IDD)***, ki karakterizira optimalnost para dopustnih rešitev x in y prvotnega oziroma dualnega programa s pomočjo sistema linearnih enačb, ki mu morata zadoščati x in y.

4. 12. 2013

Omenili smo še nekaj uporab dualnega programa oziroma dualne rešitve:

1. za dokaz ekvivalence linearnega programiranja in problema *reševanja sistemov linearnih neenačb*,

2. za *pospešitev reševanja* LP v primeru, ko je število neenačb večje od števila spremenljivk,

3. za analizo vpliva sprememb desne strani na optimalno vrednost LP pri proizvodnem problemu (*ekonomski pomen dualnih spremenljivk*).

Zapisali smo **dual LP v splošni obliki**.