**Optimizacijske naloge in problemi**

Ogledali smo si tri zglede optimizacijskih nalog oz. problemov:

1. proizvodni problem,
2. prirejanje opravil,
3. problem potujočega trgovca.

Za vsakega od njih smo izbrali primeren *matematični model* in ugotovili, da gre za posebne primere znanih optimizacijskih problemov. To so:

1. *linearni program,*
2. *problem najcenejšega popolnega prirejanja v polnem dvodelnem grafu,*
3. *problem najcenejšega Hamiltonovega cikla v polnem grafu.*

Formalno smo definirali ***optimizacijsko nalogo*** kot urejeno trojico (*D*,*f*,*opt*)*,* kjer je *D* množica *dopustnih rešitev*, *f*:*D*→*R* *namenska* ali *ciljna funkcija* in *opt* vrsta ekstrema, ki ga iščemo (*opt*∈{min,max,inf,sup}).

**Oznake.** Za optimizacijsko nalogo *P*=(*D*,*f*,*extr*) označimo:

1. *v*∗(*P*)=*opt*{*f*(*x*); *x*∈*D*} (*optimalna vrednost* naloge),
2. *D*(*P*)=*D* (množica *dopustnih rešitev* naloge),
3. *Opt*(*P*)={*x*∗∈*D*(*P*); *f*(*x*∗)=*v*∗} (množica *optimalnih rešitev* naloge).

**Definicija.** Optimizacijska naloga (*D*,*f*,*opt*) je:

* *dopustna*, če ima vsaj eno dopustno rešitev,
* *nedopustna*, če nima nobene dopustne rešitve (se pravi, če je množica dopustnih rešitev *D* prazna).

**Definicija.** Dopustna optimizacijska naloga (*D*,*f*,*opt*) je:

* *omejena*, če iščemo max ali sup in je namenska funkcija *f*(*x*) na *D* navzgor omejena, ali če iščemo min ali inf in je namenska funkcija *f*(*x*) na *D* navzdol omejena;
* *neomejena*, sicer.

Ugotovili smo, da je glede na obstoj rešitev vsaka optimizacijska naloga *P* enega od naslednjih štirih tipov:

1. *nedopustna* (če je množica *D*(*P*) prazna),
2. dopustna, a *neomejena*,
3. dopustna in omejena, a *nima nobene optimalne rešitve*,
4. *ima vsaj eno optimalno rešitev* (tj. množica *Opt*(*P*) ni prazna).

*10.10.2013*

Ogledali smo si primere optimizacijskih nalog vseh štirih tipov.

Naslednja trditev podaja dva očitna zadostna pogoja za obstoj optimalnih rešitev:

**Trditev.** Naj bo *P*=(*D*,*f*,*opt*) optimizacijska naloga.

1. Če je množica dopustnih rešitev *D* neprazna in končna, ima naloga *P* vsaj eno optimalno rešitev.
2. Če je množica dopustnih rešitev *D* neprazna, zaprta in omejena podmnožica evklidskega prostora *Rn* in je namenska funkcija *f*:*D*→*R* zvezna, ima naloga *P* vsaj eno optimalno rešitev.

V prvem primeru govorimo o *diskretni* ali *kombinatorični optimizaciji*, v drugem pa o *zvezni optimizaciji*.

Ugotovili smo, da lahko vsako maksimizacijsko nalogo preprosto prevedemo na neko minimizacijsko nalogo in tudi obratno, saj velja:

max{*f*(*x*); *x*∈*D*} = −min{−*f*(*x*); *x*∈*D*},

min{*f*(*x*); *x*∈*D*} = −max{−*f*(*x*); *x*∈*D*}.

**1.2. Konveksne množice in konveksne funkcije**

***Definicija****.* Množica *A*⊆*Rn* je **konveksna**, če za vse *x*,*y*∈*A* in *λ*∈[0,1] velja: *λx*+(1−*λ*)*y*∈*A*. Pokazali smo, da je presek neprazne družine konveksnih množic konveksen.

**Konveksna ovojnica**  C(*A*) poljubne množice *A*⊆*Rn* je presek družine vseh konveksnih množic, ki vsebujejo *A*. Pokazali smo, da je C(*A*) najmanjša konveksna množica, ki vsebuje *A*, in da je enaka množici vseh konveksnih kombinacij elementov množice *A*.

***Definicija****.* Preslikava *f*:*A*→*R*, kjer je *A* konveksna podmnožica evklidskega prostora *Rn*, je **konveksna funkcija**, če za vse *x*,*y*∈*A* in *λ*∈[0,1] velja: *f*(*λx*+(1−*λ*)*y*)≤*λf*(*x*)+(1−*λ*)*f*(*y*).

***Zgledi****:* Preslikava *f*:*R*→*R,* kjer je *f*(*x*)=*x*2, je konveksna funkcija. Vsaka afina funkcija in vsaka norma je konveksna funkcija. Prav tako je konveksna vsota konveksnih funkcij in produkt konveksne funkcije z nenegativno konstanto. Konveksen je tudi kompozitum (*f*∘*g*)(*x*) konveksnih funkcij *g*:*A*→*Rk* in *f*:*g*(*A*)→*R*, če je *g* afina, in kompozitum (*f*∘*g*)(*x*) konveksnih funkcij *g*:*A*→*R* in *f*:C(*g*(*A*))→*R*, če je *f* nepadajoča na C(*g*(*A*)).

***Definicija*.** Naj bo *A*⊆*Rn* in *f*:*A*→*R*.

Točka *x*∈*A* je *(globalni) minimum* *f* na *A*, če ∀*y*∈*A*: *f*(*x*)≤*f*(*y*).

Točka *x*∈*A* je *lokalni minimum* *f* na *A*, če ∃*ε*>0 ∀*y*∈*A*: (||*x*−*y*||<*ε* ⇒ *f*(*x*)≤*f*(*y*)).

***Izrek o minimumu konveksne funkcije.*** *Naj bo A konveksna množica v Rn in f*:*A*→*R konveksna funkcija. Potem je vsak lokalni minimum f na A tudi globalni.*

Ta izrek kaže na pomembnost konveksnosti pri optimizaciji, saj je v splošnem laže poiskati lokalne kot pa globalne ekstreme.

*17.10.2013*

Navedli smo še nekaj pomembnih posebnih primerov konveksnih množic: *afine podprostore,* *konveksne stožce* in *konveksne poliedre*. Za vsako množico *A*⊆*Rn* smo definirali *dualni stožec* *A*∗.

Definirali smo *ekstremne* ali *skrajne točke* konveksne množice. Pokazali smo, da so ekstremne točke (*oglišča*) konveksnega poliedra *K*={*x*∈*Rn*; *Ax*≤*b*} natanko tiste točke *x*∈*K*, za katere obstaja *n* linearno neodvisnih vrstic *ai*1,…,*ain* matrike *A*, tako da je ⟨*aij*,*x*⟩=*bij* za *j*=1,…,*n*.

***Izrek***. *Naj bo K={x∈Rn; Ax≤b} neprazen konveksen polieder. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

*(i) K ima vsaj eno oglišče,*

*(ii) K ne vsebuje premic,*

*(iii) rangA=n.*