**Pretoki in prerezi**

Dano je pretočno omrežje, po katerem teče določena tekočina. Omrežje vsebuje dve odlikovani vozlišči, *izvor* *s* in *ponor* *t*, za vsako povezavo pa poznamo zgornjo mejo dopustnega pretoka. Iščemo največji možni pretok iz *s* v *t*.

Podatki za ***problem največjega pretoka***:

1. usmerjen graf *G*=(*V*,*E*) z odlikovanima vozliščema *s* in *t*,
2. nenegativno realno število*cij* za vsako povezavo *ij*∈*E* (*prepustnost* ali *kapaciteta* povezave *ij*).

Prepustnost *c* razširimo na vse pare vozlišč takole:

*c*(*i*,*j*)=*cij*, če *ij*∈*E*,

*c*(*i*,*j*)=0, če *ij*∉*E*.

Iščemo *največji pretok* *f*:*V*×*V*→R, ki zadošča pogojem

1. *f*(*i*,*j*)=−*f*(*j*,*i*)  za vse *i*,*j*∈*V*  (*antisimetričnost pretoka*),

2. ∑*j*∈*Vf*(*i*,*j*)=0 za vse *i*∈*V*∖{*s*,*t*} (*Kirchhoffovi zakoni*),

3. *f*(*i*,*j*)≤*c*(*i*,*j*)za vse *i*,*j*∈*V*  (*ustreznost pretoka*).

Pri tem *velikost* pretoka *f* definiramo kot

|*f*|=∑*i*∈*Vf*(*i*,*t*).

*Prerez* omrežja (*G*,*s*,*t*,*c*) definiramo kot par množic *A*,*B*⊆*V*, kjer je

1. *A*∪*B*=*V*, *A*∩*B*=∅,

2. *s*∈*A*, *t*∈*B*.

*Prepustnost* prereza (*A*,*B*) definiramo kot *c*(*A*,*B*)=∑*i*∈*A*,*j*∈*Bc*(*i*,*j*). Če je *f* pretok v *G*, definiramo *tok skozi prerez* (*A*,*B*) kot *f*(*A*,*B*)=∑*i*∈*A*,*j*∈*Bf*(*i*,*j*).

***Trditev.*** Za vsak pretok *f* in vsak prerez (*A*,*B*) v *G*  je *f*(*A*,*B*)=|*f*|.

Pri ***problemu najmanjšega prereza*** v omrežju (*G*,*s*,*t*,*c*) iščemo prerez z najmanjšo prepustnostjo.

***Izrek.*** Za vsak pretok *f* in vsak prerez (*A*,*B*) v *G* je *f*(*A*,*B*)≤*c*(*A*,*B*).

Če je *f*(*A*,*B*)=*c*(*A*,*B*), je *f* največji pretok in (*A*,*B*) najmanjši prerez v *G*.

Če je *f* pretok v omrežju (*G*,*s*,*t*,*c*), definiramo *residualno omrežje* (*Gf*,*s*,*t*,*r*) takole: *r*=*c*−*f*, *V*(*Gf*)=*V*, *E*(*Gf*)={*ij*∈*E*; *r*(*i*,*j*)>0}.

Usmerjeno pot od *s* do *t* v *Gf* imenujemo *povečujoča pot*.

***Izrek*** (Ford & Fulkerson). Naj bo *f* pretok v omrežju (*G*,*s*,*t*,*c*). Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. *f* je največji pretok v (*G*,*s*,*t*,*c*),

2. v *Gf* ni povečujočih poti,

3. obstaja prerez (*A*,*B*) v (*G*,*s*,*t*,*c*), tako da je |*f*|=*c*(*A*,*B*).

***Algoritem Forda in Fulkersona:***

*Podatki:* omrežje (*G*,*s*,*t*,*c*)

*Rezultat*: največji pretok *f* in najmanjši prerez (*A*,*B*)

*Postopek*:

1. *f* = poljuben pretok v (*G*,*s*,*t*,*c*)

2. **dokler** v *Gf* obstaja povečujoča pot *P* **ponavljaj**

*d*=min{*r*(*i*,*j*); *ij*∈*E*(*P*)}

*fP*(*i*,*j*)=*d*, če *ij*∈*E*(*P*)
*fP*(*i*,*j*)=−*d*, če *ji*∈*E*(*P*)
*fP*(*i*,*j*)=0, sicer

*f*=*f*+*fP*

3. *A*={*v*∈*V*(*G*); obstaja usmerjena pot *s*→*v* v *Gf*}

4. *B*=*V*(*G*)∖*A*

5. **vrni** *f*,(*A*,*B*)