Pretoki in prerezi

Dano je pretočno omrežje, po katerem teče določena tekočina. Omrežje vsebuje dve odlikovani vozlišči, *izvor* s in *ponor* t, za vsako povezavo pa poznamo zgornjo mejo dopustnega pretoka. Iščemo največji možni pretok iz s v t.

Podatki za ***problem največjega pretoka***:

1. usmerjen graf $G=(V,E)$ z odlikovanima vozliščema s in t,
2. nenegativno realno število c_{ij} za vsako povezavo $ij\in E$ (*prepustnost* ali *kapaciteta* povezave ij).

Prepustnost c razširimo na vse pare vozlišč takole:

$c(i,j)=c_{ij}$, če $ij\in E$,

$c(i,j)=0$, če $ij\notin E$.

Iščemo *največji pretok* $f: V\times V\rightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča pogojem

1. $f(i,j)=-f(j,i)$ za vse $i,j\in V$ (*antisimetričnost pretoka*),
2. $\sum_{j\in V} f(i,j)=0$ za vse $i\in V\setminus\{s,t\}$ (*Kirchhoffovi zakoni*),
3. $f(i,j)\leq c(i,j)$ za vse $i,j\in V$ (*ustreznost pretoka*).

Pri tem *velikost* pretoka f definiramo kot

$|f|=\sum_{i\in V} f(i,t)$.

Prerez omrežja (G,s,t,c) definiramo kot par množic $A,B\subseteq V$, kjer je

1. $A\cup B=V$, $A\cap B=\emptyset$,
2. $s\in A$, $t\in B$.

Prepustnost prereza (A,B) definiramo kot $c(A,B)=\sum_{i\in A, j\in B} c(i,j)$. Če je f pretok v G, definiramo *tok skozi prerez* (A,B) kot $f(A,B)=\sum_{i\in A, j\in B} f(i,j)$.

Trditev. Za vsak pretok f in vsak prerez (A,B) v G je $f(A,B)=|f|$.

Pri ***problemu najmanjšega prereza*** v omrežju (G,s,t,c) iščemo prerez z najmanjšo prepustnostjo.

Izrek. Za vsak pretok f in vsak prerez (A,B) v G je $f(A,B)\leq c(A,B)$.

Če je $f(A,B)=c(A,B)$, je f največji pretok in (A,B) najmanjši prerez v G.

Če je f pretok v omrežju (G,s,t,c), definiramo *residualno omrežje* (G_f,s,t,r) takole:
$r=c-f$, $V(G_f)=V$, $E(G_f)=\{ij\in E;\ r(i,j)>0\}$.

Usmerjeno pot od s do t v G_f imenujemo *povečujoča pot*.

Izrek (Ford & Fulkerson). Naj bo f pretok v omrežju (G, s, t, c). Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. f je največji pretok v (G, s, t, c),

2. v G_f ni povečujočih poti,

3. obstaja prerez (A, B) v (G, s, t, c), tako da je $|f| = c(A, B)$.

Algoritem Forda in Fulkersona:

Podatki: omrežje (G, s, t, c)

Rezultat: največji pretok f in najmanjši prerez (A, B)

Postopek:

1. $f =$ poljuben pretok v (G, s, t, c)

2. **dokler** v G_f obstaja povečujoča pot P **ponavljaj**

$d = \mathrm{min}\{r(i, j);\ \ ij \in E(P)\}$

$f_P(i, j) = d$, če $ij \in E(P)$
$f_P(i, j) = -d$, če $ji \in E(P)$
$f_P(i, j) = 0$, sicer

$f = f + f_P$

3. $A = \{v \in V(G);\ \texttt{obstaja usmerjena pot}\ s \rightarrow v\ \texttt{v}\ G_f\}$

4. $B = V(G) \setminus A$

5. **vrni** $f, (A, B)$