Problem razvoza (PR)

Dano je transportno omrežje, po katerem prevažamo določeno dobrino. V nekaterih krajih to dobrino izdelujejo oziroma pridobivajo, v drugih pa jo porabljajo. Predpostavljamo, da je skupna ponudba enaka skupnemu povpraševanju. Zanima nas, kako zadostiti povpraševanju z minimalnimi prevoznimi stroški.

Matematični model PR

Podatki:

1. usmerjen graf $G=(V,E)$,
2. realno število b_v za vsako vozlišče $v \in V$ (*povpraševanje* v vozlišču v, če je $b_v > 0$, oziroma *ponudba*, če je $b_v < 0$),
3. realno število c_e za vsako povezavo $e \in E$ (stroški prevoza enote tovora vzdolž povezave e).

Predpostavka o podatkih: vsota b_v po vseh vozliščih $v \in V$ je enaka 0 (skupna ponudba je enaka skupnemu povpraševanju).

Pri PR iščemo **razvoz** $x=(x_e)_{e \in E}$, ki **minimizira** skupne prevozne stroške $\sum_{e \in E} c_e x_e$ pri pogojih

1. $x_e \geq 0$ za vse $e \in E$ (nenegativnost),
2. za vsako vozlišče $v \in V$ velja:

$\sum_{e \in E:\ konec(e)=v} x_e - \sum_{e \in E:\ zacetek(e)=v} x_e = b_v$ (*Kirchhoffovi zakoni*).

PR v matrični obliki

Iščemo: $\min \langle c, x \rangle$
pri pogojih $Ax = b,\ x \geq 0$

kjer je A incidenčna matrika usmerjenega grafa G, b pa vektor z ničelno vsoto komponent. To je poseben primer LP (v splošni obliki).

Reševanje PR s simpleksno metodo na omrežjih

Definicija: Dopustna rešitev x je ***drevesna***, če v grafu G obstaja vpeto drevo T, tako da je razvoz x na povezavah zunaj drevesa T enak 0.

Denimo, da je x dopustna drevesna rešitev, ki ustreza drevesu T. Izboljšati jo skušamo takole:

1. V vozliščih $1,2,\ldots,n$ določimo **cene prevoza** $y_1,y_2,\ldots,y_n$ iz sistema enačb:

$y_1=0,$
$y_i+c_{ij}=y_j$, za vse povezave ij drevesa T.

2. **Vstopajočo povezavo** e izberemo med tistimi povezavami ij zunaj drevesa T, za katere je $y_i+c_{ij}<y_j$.

3. Graf $T+e$ vsebuje natanko en cikel C. Povezave cikla C delimo na *preme* (ki določajo isto orientacijo cikla C kot e) in *obratne* (ki določajo nasprotno orientacijo cikla C kot e). Naj bo

$$t=\min\{x_{uv};\ uv \text{ obratna povezava na } C\}.$$

Izstopajočo povezavo f izberemo med tistimi obratnimi povezavami uv, pri katerih je dosežen gornji minimum.

4. Razvoz na premih povezavah povečamo za t, na obratnih pa zmanjšamo za t. Drevo T nadomestimo z drevesom $T+e-f$ in se vrnemo na korak 1.

To ponavljamo, dokler na 2. koraku ne moremo več izbrati izstopajoče povezave, ker za vse povezave ij zunaj drevesa T velja: $y_i+c_{ij}\geq y_j$.

2. 1. 2014

Trditev. Na vsakem koraku simpleksne metode na omrežju za ddr x in za vektor cen y, ki pripadata istemu vpetemu drevesu T, velja: $\langle c,x\rangle=\langle b,y\rangle$.

Posledica: Če za vse povezave ij grafa G velja neenačba $y_i+c_{ij}\geq y_j$, je trenutna drevesna dopustna rešitev optimalna.

Z drugimi besedami: Če ne moremo izbrati vstopajoče povezave, je trenutna ddr optimalna.

Preostali problemi pri reševanju PR:

1. Kaj če ne moremo izbrati izstopajoče povezave, ker na ciklu C v grafu $T+e$ ni nobene obratne povezave? V tem primeru ima omrežje G usmerjen cikel z negativno vsoto prevoznih stroškov, torej je PR ***neomejen***.

2. Ogledali smo si ***Cunninghamovo pravilo***, ki nam zagotavlja, da simpleksni postopek na omrežju ne bo zašel v neskončno zanko.

3. Z*ačetno drevesno dopustno rešitev* poiščemo z ***dvofazno simpleksno metodo na omrežju***.
V I. fazi izberemo poljubno vozlišče r (*koren*) in dodamo umetne povezave: za vsako vozlišče k z $b_k\geq 0$ dodamo povezavo rk (če je še ni); za vsako vozlišče k z $b_k<0$ dodamo povezavo kr (če je še ni). Na novem omrežju rešimo pomožni PR, kjer stroške prevoza na

povezavah definiramo takole:

$d_{ij}=1$, če ij umetna povezava,
$d_{ij}=0$, če ij prvotna povezava.

Za začetno drevesno dopustno rešitev pomožnega problema vzamemo tisto, ki ustreza zvezdi s središčem v korenu r. Pomožni problem je gotovo omejen, ker so vsi stroški $d_{ij} \geq 0$. Rešimo ga s simpleksno metodo na omrežjih in dobimo rešitev x_*, ki ustreza drevesu T_*. Tu lahko nastopijo trije primeri:

a) T_* ne vsebuje umetnih povezav. V tem primeru T_* določa iskano *začetno drevesno dopustno rešitev* prvotnega PR, ki ga v II. fazi rešimo z osnovno simpleksno metodo na omrežjih.

b) T_* vsebuje umetno povezavo ij, na kateri je $x_{*ij}>0$. V tem primeru je prvotni PR *nedopusten*.

c) T_* vsebuje umetne povezave, vendar je $x_{*ij}=0$ na vseh umetnih povezavah ij. V tem primeru omrežje razpade na dve manjši neodvisni podomrežji. Rešitev PR dobimo tako, da ga rešimo ločeno na vsakem od obeh podomrežij.

S tem je predstavitev simpleksne metode na omrežju končana.

8. 1. 2014

Zapisali smo **dual problema razvoza**. Ugotovili smo, da je pri reševanju problema razvoza P ob izteku simpleksnega postopka na omrežju vektor cen y ravno optimalna rešitev dualnega problema P'.

Dokazali smo, da za problem razvoza, ki je zelo poseben primer linearnega programa, velja **izrek o celih rešitvah**: *Naj bodo vse komponente vektorja povpraševanja b cela števila. Če ima problem razvoza dopustno rešitev, nam simpleksna metoda na omrežju poišče celoštevilsko dopustno rešitev; in če ima optimalno rešitev, nam simpleksna metoda na omrežju poišče celoštevilsko optimalno rešitev.*