

Dualnost v linearinem programiranju

1. Linearni program Π je podan kot $\max(-x_1 + 2x_2)$ pri pogojih $x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 + 2x_2 \geq 6$, $5x_1 - ax_2 \geq 3$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 1$. Poišči dualni program Π' tega programa. Pokaži, da je za $a < 0$ program Π' nedoposten.
2. Dan je linearни program $\max(2x + 3y - z)$ pri pogojih $x - y - z \leq 3$, $x + 2y + 3z \leq 18$, $x + 3y - 2z \leq 4$, $x, y, z \geq 0$. Preveri, ali je $x = 7$, $y = 1$, $z = 3$ optimalna rešitev tega programa.
3. V tovornem letalu je prostora za za 60 m^3 tovora. V skladišču imamo tri vrste tovora. Njihove značilnosti so naštete v spodnji tabeli:

tovor	količina (v m^3)	gostota (v tona/ m^3)	vrednost (za m^3)
blago A	40	2	1000
blago B	50	1	1200
blago C	20	3	1500

Nosilnost letala je 80 ton. V letalo želimo naložiti tovor tako, da bo skupna vrednost tovora čim večja. Ali je tovor, sestavljen iz 50 m^3 blaga B in 10 m^3 blaga C, optimalen?

4. Dokaži, da za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ velja natanko ena od spodnjih trditev:
 - (a) $\exists x \in \mathbb{R}^n : (Ax = 0 \wedge x > 0)$
 - (b) $\exists y \in \mathbb{R}^m : (A^T y \geq 0 \wedge A^T y \neq 0)$

(Zapis $x > 0$ pomeni, da so vse komponente vektorja x strogo pozitivne.) Namig: KID.

5. Dan je linearni program v standardni obliki $\max(\langle c, x \rangle)$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$, kjer je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -6 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dokaži, da je $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ optimalna rešitev tega programa.

6. Dana je enoparametrična družina linearnih programov $LP(k)$, kjer je k poljubno realno število:

$$\max 3x_1 + kx_2 + x_3 \quad \text{pri pogojih} \quad 2x_1 + x_3 \geq 3, \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Poišči optimalno rešitev linearnega programa $LP(1)$. Ali ima eno samo optimalno rešitev? Ugotovi, za katere vrednosti parametra $k \in \mathbb{R}$ je to tudi optimalna rešitev programa $LP(k)$.

7. Za spodnji linearni program preveri, ali je rešitev $x = (5/4, 0, 15/4)$ optimalna:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 5x_2 + 8x_3 \\ \text{s.p.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 60 \\ & x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Za največ koliko se lahko poveča vrednost kriterijske funkcije, če v tretji vrstici omejitev povečamo z 20 na 30?

8. Komisija ima na razpolago 100 denarnih enot za subvencioniranje projektov. Izbira lahko med tremi projekti: A, B in C. Že vnaprej se je tudi odločila, da bo razdelila celotni znesek. Pri odločanju mora upoštevati naslednje omejitve in kriterije: projekt A mora dobiti vsaj dvakrat toliko sredstev kot projekt B, projekta B in C pa skupaj ne smeta dobiti več kot 60 denarnih enot. Z razdelitvijo sredstev želimo v javnosti povzročiti čim manjše nezadovoljstvo. Nezadovoljstvo meri funkcija

$$3x_1 + x_2 + |x_1 + 3x_2 + x_3 - 150|,$$

kjer x_1, x_2, x_3 pomenijo zneske, ki jih po vrsti dobijo A,B in C.

- (a) Zapiši nalogo v obliki linearnega programa.
- (b) Z dualnim dopolnjevanjem dokaži, da je razdelitev $x_1 = 40$, $x_2 = 20$ in $x_3 = 40$ optimalna.
- (c) Kakšno spremembo nezadovoljstva lahko pričakujemo, če drugo omejitev sprememimo tako, da zahtevamo, da projekta B in C skupaj dobita največ 50 denarnih enot?