Konveksne množice, konveksne funkcije

1. Naj bo A realna simetrična $n \times n$ matrika in $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana s predpisom $f(x) = \langle Ax, x\rangle$. Dokaži, da je f konveksna natanko tedaj, ko je A pozitivno definitna.

2. Naj bo A konveksna množica in $f, g : A \to \mathbb{R}$ konveksni funkciji. Pokaži, da je $f + g : A \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija.

3. Naj bo A konveksna množica, $g : A \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija in $f : \mathcal{C}(g(A)) \to \mathbb{R}$ konveksna nepadajoča funkcija. Pokaži, da je $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ konveksna.

4. Funkciji $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R}^n)$ priredimo njen *epigraf*:

   $$\operatorname{epi}(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) |\ f(x_1, \ldots, x_n) \leq x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

   Naj bo A konveksna množica in $f : A \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Pokaži, da je f konveksna natanko tedaj, ko je $\operatorname{epi}(f)$ konveksna množica.

5. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nenegativni, nepadajoči konveksni funkciji. Pokaži, da je $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna.

6. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica in $f, g : A \to \mathbb{R}$ konveksni funkciji. Pokaži, da je $\max(f, g) : A \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija.

7. Naj bo $A \subseteq R^n$ konveksna, $f : A \to \mathbb{R}$ konveksna, $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ in x notranja točka zveznice x_1 in x_2. Pokaži:

   $$\frac{f(x) - f(x_1)}{\|x - x_1\|} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\|x_2 - x_1\|} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\|x_2 - x\|}.$$